

Formelblatt

Version: 1.5

Algebra

Binomische Formeln

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

Binomischer Lehrsatz

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \dots + b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Quadratische Gleichungen

Quadratische Gleichung: $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Potenzen und Wurzeln

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p} \quad a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad a^x \cdot b^x = (ab)^x$$

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

Logarithmen

$$\log_a(b) = x \Leftrightarrow a^x = b$$

$$\log_a(uv) = \log_a(u) + \log_a(v)$$

$$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$$

$$\log_a(u^x) = x \cdot \log_a(u)$$

$$\log(a) = \log_{10}(a)$$

$$\ln(a) = \log_e(a)$$

mit $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.71828$

Basiswechsel

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

Planimetrie

Rechtwinkliges Dreieck

Satz des Pythagoras

$$a^2 + b^2 = c^2$$

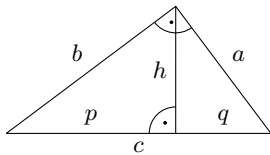
Kathetensatz

$$a^2 = cp$$

$$b^2 = cq$$

Höhensatz

$$h^2 = pq$$



Gleichseitiges Dreieck

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

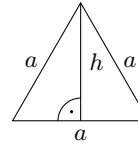
$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Dreieck

$$A = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

mit $s = \frac{a+b+c}{2}$



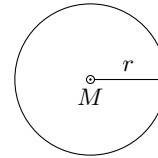
Kreis

Fläche:

$$A = \pi r^2$$

Umfang:

$$U = 2\pi r$$



Stereometrie

Prisma: $V = G \cdot h$ G : Grundfläche

Pyramide: $V = \frac{G \cdot h}{3}$

Zylinder: $V = r^2 \pi h$ $M = 2\pi r h$ $S = 2r\pi(r + h)$

Kegel: $V = \frac{r^2 \pi \cdot h}{3}$ $M = r s \pi$ $S = r\pi(r + s)$
 $(s = \sqrt{r^2 + h^2})$

Kugel $V = \frac{4\pi \cdot r^3}{3}$ $S = 4\pi \cdot r^2$

Trigonometrie

$$\sin \rightarrow \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \quad \cos \rightarrow \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \quad \tan \rightarrow \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

$$\text{Cosinus-Satz } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

$$\text{Sinus-Satz: } \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2r \quad (r \text{ Umkreisradius})$$

Goniometrie

$$\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1 \quad \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \quad \cos(2\alpha) = 2 \cdot \cos^2(\alpha) - 1$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)}$$

Vektorgeometrie

Addition von Vektoren

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

Multiplikation

$$k\vec{a} = k \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k a_x \\ k a_y \\ k a_z \end{pmatrix}$$

Kollinearität von \vec{a} und \vec{b} :

$$\text{Es gibt ein } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ s.d. } \vec{a} = \lambda \vec{b}.$$

Punkt und Ortsvektor | Betrag (Länge) eines Vektors

$$P(x/y/z); \vec{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \|\vec{a}\| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Abstand von zwei Punkten A, B: $\|\vec{OB} - \vec{OA}\|$

Mittelpunkt von zwei Punkten A, B: $\frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$

Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos(\alpha) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z; \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Vektorprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Es gilt $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$ und $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$. $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ entspricht der Fläche des Parallelogramms zwischen \vec{a} und \vec{b} .

Auf der Ebene

Geradengleichungen:

Parameterform	Koordinatenform	Normalform
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix}$	$ax + by = c$	$y = mx + b$

Kreis:

$$\text{Mittelpunktgleichung: } (x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$$

Mittelpunkt: $M(u/v)$

$$\text{allg. Kreisgleichung: } x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$\text{Mittelpunkt: } M\left(-\frac{a}{2} / -\frac{b}{2}\right)$$

Im Raum

Gerade

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} \quad \left| \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \right.$$

$$\text{Ebene (Normalenform): } \vec{n} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{n} \cdot \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$\text{Ebene (Koordinatenform): } ax + by + cz = d$$

$$\text{Abstand eines Punktes } P \text{ von einer Gerade: } \frac{\|\vec{r} \times \vec{AP}\|}{\|\vec{r}\|}$$

\vec{r} : Richtungsvektor, \vec{OA} : Stützvektor.

$$\text{HNF: } \frac{ax + by + cz - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \cdot \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = 0$$

Kugel:

$$\text{Mittelpunktgleichung: } (x - u)^2 + (y - v)^2 + (z - w)^2 = r^2$$

Mittelpunkt: $M(u/v/w)$

$$\text{allg. Kugelgleichung: } x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz = d$$

$$\text{Mittelpunkt: } M\left(-\frac{a}{2} / -\frac{b}{2} / -\frac{c}{2}\right)$$

$$\text{Radius: } r = \sqrt{d + u^2 + v^2 + w^2}$$

Analysis

Folgen und Reihen

Folgen

Arithmetisch	Geometrisch
$d = a_{n+1} - a_n$	$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$
$a_n = a_1 + (n-1)d$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Reihen

Arithmetische Reihen
 $s_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d)$

Geometrische Reihen
 $s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} \quad s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = a_1 \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$.

Funktionen

Lineare $f(x) = mx + q$
 m : Steigung, q : y -Achsenabschnitt

Quadratische $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-u)^2 + v$
 $u = -\frac{b}{2a}$, $a < 0$: Parabelöffnung nach unten.

Exponential $f(x) = ab^x$
 a : Anfangswert, b : Wachstums-/Zerfallsfaktor.

Polynom $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = \sum_{i=0}^n a_i x^i$
 Höchste Potenz von n : Grad des Polynomes

Differentialrechnung

Differenzenquotient	Ableitungsfunktion
$D_f(x_0, h) = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$	$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
Faktorregel	Summenregel
$(c \cdot f)' = c \cdot f'$	$(f+g)' = f' + g'$
Kettenregel	Potenzregel
$(u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$	$(x^n)' = nx^{n-1}$
Produktregel	Quotientenregel
$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

Spezielle Ableitungen:

$(\sin(x))' = \cos(x)$	$(\cos(x))' = -\sin(x)$
$(e^x)' = e^x$	$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$
$(a^x)' = \ln(a) a^x$	

Integralrechnung

Unbestimmtes Integral:	Bestimmtes Integral:
$\int f(x) dx = F(x) + C$	$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x$
mit $F'(x) = f(x)$ und C konstant.	mit $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Hauptsatz der Differential und Integralrechnung:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x) + C]_a^b = F(b) - F(a)$$

Eigenschaften des Integrals

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f_1(x) + f_2(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx$$

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Substitutionsmethode:

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x) dx = \int f(z) dz \quad \text{mit } z = u(x)$$

$$\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(z) dz$$

Partielle Integration:

$$\int f_1(x) f_2'(x) dx = f_1(x) f_2(x) - \int f_1'(x) f_2(x) dx$$

Rotation um x -Achse

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Fläche zwischen Graphen:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Kurvenabschnitts (Länge)

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Rotation um y -Achse

$$V = 2\pi \int_a^b (x f(x)) dx$$

Durchschnitt:

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Mantelfläche (Rotation um x -Achse)

$$M = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Stochastik

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Laplace-Regel: (Alle Ergebnisse in S gleich wahrscheinlich.)

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl günstige Ergebnisse}}{\text{Anzahl mögliche Ergebnisse}} = \frac{|E|}{|S|}$$

Allg. Summenregel:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

Komplementärregel: $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$

$$\text{Bedingte W'keit: } P_{E_2}(E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$$

Baumdiagramme

Pfadmultiplikationsregel Entlang eines Pfades wird multipliziert.

Pfadadditionsregel Mehrere Pfade werden addiert.

Zufallsgrößen und Verteilungen

Erwartungswert $E(X) = \mu = \sum_{i=1}^m a_i P(X = a_i)$

Varianz $V(X) = \sum_{i=1}^m (a_i - \mu)^2 P(X = a_i)$

Standardabweichung $\sigma = \sqrt{V(X)}$

	$P(X = k)$	μ	$V(X)$
Binomialverteilung	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$n \cdot p$	$n \cdot p \cdot (1-p)$

Normalverteilung:

W'keit σ -Umgebung	Radius	W'keit σ -Umgebung	Radius
50%	0.67σ	95%	1.96σ
75%	1.15σ	98%	2.33σ
80%	1.28σ	99%	2.58σ
90%	1.64σ	99.9%	3.29σ

Kombinatorik

n unterscheidbare Elemente anordnen: $n!$

Anordnen mit k_1, \dots, k_n gleichen Elementen: $\frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}$

Ziehen ohne Zurücklegen:

Reihenfolge beachten: $\frac{n!}{(n-k)!}$

Reihenfolge nicht beachten: $\binom{n}{k}$

Ziehen mit Zurücklegen:

Reihenfolge beachten: n^k

Reihenfolge nicht beachten: $\binom{n+k-1}{k}$

Taschenrechner-Benutzung

Trotz Bogenmasseinstellung in Grad rechnen:

$$\sin(60^\circ) \quad \sin^{-1}(0.5)/1^\circ$$

Vektorgeometrie:

$\mathbf{a} := [\mathbf{ax}, \mathbf{ay}, \mathbf{az}]$ Vektor abspeichern
 $\text{norm}(\mathbf{a})$ Länge eines Vektors
 $\text{dotp}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$
 $\text{crossp}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$

Analysis

Menu \rightarrow 4 \rightarrow 1 Ableiten

Menu \rightarrow 4 \rightarrow 3 Integral

Stochastik

$\text{ncr}(n, k) \binom{n}{k}$

Binomialverteilte Zufallsgrösse X :

$\text{binompdf}(n, p, k) \quad P(X = k)$

$\text{binomcdf}(n, p, k) \quad P(X \leq k)$

$\text{binomcdf}(n, p, k1, k2) \quad P(k1 \leq X \leq k2)$

CC BY SA (CC BY-SA) 2011 - 2018 Beni Keller

