

Block 1: Winkelberechnungen am rechtwinkligen Dreieck

Lernziele

- Du kennst die Definitionen der Sinus-, Kosinus- und Tangensfunktion am Einheitskreis.
- Du wendest die trigonometrischen Funktionen für Berechnungen an rechtwinkligen Dreiecken an.
- Du benutzt die Umkehrung der trigonometrischen Funktionen zur Berechnung von Winkeln.
- Für die Winkel 0° , 30° , 45° , 60° , 90° und 180° berechnest du die Werte der trigonometrischen Funktionen exakt.
- Du benutzt die trigonometrischen Funktionen in Anwendungen zur Berechnung von Längen, Distanzen und Höhen.
- Du gibst Steigungen in Prozent und über den Neigungswinkel an und benutzt den Zusammenhang der beiden Werte für Umrechnungen.

Hilfsmittel und Bücher

- Taschenrechner mit maximalem Funktionsumfang des TI-30
- Trigonometrie und Vektorgeometrie, Erhard Rhy (Grünes Heft)

Block 1: Lernkontrolle zu Winkelberechnungen**Aufgabe 1.**

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse c und Katheten a und b . Der Gegenwinkel von a heisst α und jener von b bezeichnen wir mit β .

- a) Gegeben sei $a = 3$ und $c = 6$. Berechne α und β .
- b) Gegeben sei $c = 7$ und $\alpha = \frac{2\pi}{5}$. Berechne die restlichen Winkel und Seiten. Gib die Winkel in Grad und Bogenmass an.

Aufgabe 2.

Gegeben sei ein Dreieck mit den Seiten a , b und c sowie entsprechenden Gegenwinkeln α , β und γ . Von diesem Dreieck sind die Seite $a = 12$, Seite $b = 15$ und $\alpha = 32^\circ$ gegeben. Berechne die fehlenden Seiten und Winkel von allen möglichen Dreiecken, welche diese Angaben erfüllen. (Tipp: Berechne als Hilfsgrösse eine Höhe der Dreiecke.)

Aufgabe 3.

Von einem ebenen Feld aus siehst du einen Berg. Du weisst, dass die Bergspitze 825 m höher als das Feld liegt. Du siehst den Berg unter einem Höhenwinkel von $\frac{\pi}{3}$. Wie weit ist der Gipfel von dir entfernt (Luftliniendistanz)?

Rechne die Aufgabe exakt und von Hand. Leite allfällige Werte von trigonometrischen Funktionen her.

Aufgabe 4.

Ein Weg auf einen Berg erstreckt sich über 2.5 km. Er startet auf einer Höhe von 512 m und führt zur Bergspitze auf 2241 m. Berechne die Steigung des Weges in Prozent und Grad.

Block 1: Lösungen zur Lernkontrolle**Lösung 1.**

$$\begin{aligned} \text{a) } \alpha &= \sin^{-1}\left(\frac{3}{6}\right) = 30^\circ \\ \beta &= 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } a &= c \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \approx 6.657 \\ b &= \sqrt{c^2 - a^2} \approx 2.163 \\ \beta &= \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{10} \hat{=} 18^\circ \end{aligned}$$

Lösung 2.

Es gibt zwei Dreiecke, welche diese Angaben erfüllen. Bei einem ist β und beim anderen γ ein stumpfer Winkel:

$$\begin{aligned} h_c &= b \sin(\alpha) \approx 7.95 \\ \beta_1 &= \sin^{-1}\left(\frac{h_c}{a}\right) \approx 41.48^\circ & \beta_2 &= 180^\circ - \beta_1 \approx 138.52 \\ \gamma_1 &= 180^\circ - \alpha - \beta_1 = 106.52 & \gamma_2 &= 180^\circ - \alpha - \beta_2 \approx 9.48^\circ \\ c_1 &= b \cos(\alpha) + a \cos(\beta_1) \approx 21.71 & c_2 &= b \cos(\alpha) - a \cos(\beta_1) \approx 3.73 \end{aligned}$$

Lösung 3.

Der Winkel $\frac{\pi}{3}$ entspricht im Gradmass 60° . Daher muss der Funktionswert von $\sin(60^\circ)$ hergeleitet werden. An einem geeigneten Dreieck lässt sich zeigen, dass $\sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Wir bezeichnen die Horizontaldistanz mit l . Es gilt $\sin(60^\circ) = \frac{825}{l}$ und somit ist

$$l = \frac{825 \text{ m}}{\sin(60^\circ)} = 555\sqrt{3} \text{ m}$$

Lösung 4.

Da wir die Weglänge (Hypotenuse) und die Höhe (Gegenkathete) kennen, können wir die Steigung mit dem Sinus berechnen:

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{2241 - 512}{2500}\right) \approx 43.75^\circ$$

Für die Steigung in Prozent fehlt uns die Horizontaldistanz d_h . Es gilt

$$d_h = \sqrt{(2500 \text{ m})^2 - (2241 \text{ m} - 512 \text{ m})^2} \approx 1805.7 \text{ m}$$

Daraus lässt sich die Steigung in Prozent berechnen:

$$\frac{2241 \text{ m} - 512 \text{ m}}{d_h} \approx 0.9755 = 97.55\%$$