Block 1: Exponentialgleichungen und Logarithmen

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a(b)$$

Lernziele

1. Du kennst die Definition des dekadischen Logarithmus und kannst seine Werte mit Hilfe des kleinen Taschenrechners berechnen.
2. Du gibst an, wie der Logarithmus zu einer Basis a definiert ist und berechnest seine Werte ohne Taschenrechner, falls der Wert exakt berechenbar ist.
3. Du berechnest den Wert eines beliebigen Logarithmus mit Hilfe des dekadischen Logarithmus auf dem Taschenrechner.
4. Du formst Terme mit Hilfe der Logarithmengesetzte um und verwendest die Gesetze zum Lösen von Exponentialgleichungen.
5. Du kannst mit Hilfe der Eigenschaften von Logarithmusfunktionen den Graphen einer Logarithmusfunktion skizzieren.

Unterlagen und Hilfsmittel

- Taschenrechner mit dem maximalen Funktionsumfang eines TI-30.
- Theorie und Einführungsaufgaben aus Unterrichtsmitschrift.
- Aufgaben aus Algebra 2, Kapitel 15 (auf `https://cloud.ksz.ch`)

Vorkenntnisse

- Grundoperationen und Bruchrechengesetze
- Funktionsbegriff und Graphen von Funktionen
- Potenzen mit natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Exponenten
- Potenzgesetzte

Lernkontrolle Block 1

Aufgabe 1.
Löse die folgenden Gleichungen nach x auf. Rechne exakt und vereinfache so weit wie möglich.

1. $10^{x+1} = 50$
2. $4 \cdot 3^{x-1} = 5^{x+1}$
3. $7^{x-2} + 7^x = 10$

Aufgabe 2.
Vereinfache die folgenden Terme so weit wie möglich.

1. $\log_b(b^7)$
2. $\log_b\left(\frac{1}{b^n}\right)$
3. $\log_{\sqrt{a}}(a^2)$

Aufgabe 3.
1. Zwischen welchen ganzen Zahlen liegt $\log_3(2180)$. Erkläre präzise, wie du dies ohne die Logarithmusfunktion des Taschenrechners herausfinden kannst.
2. Berechne $\log_3\left(\frac{1}{\sqrt{27}}\right)$ exakt. Gib jeden Lösungsschritt an.

Aufgabe 4.
Schreibe die folgenden Terme so um, dass die sie Form $\log(\bullet)$ haben, wobei $\bullet$ für einen beliebigen Term steht.

1. $3\log(4) + \log(5)$
2. $\log(v^w) - v\log(w)$
3. $-\log(a) - \log(b)$

Aufgabe 5.
Schreibe die folgenden Gleichungen ohne Logarithmus:

1. $\log_a(x) + \log_a(y) = c$
2. $\frac{\log(n^m)}{\log(m)} = a$
3. $\log_b(a) = \log_b(c)$

Lösungen Lernkontrolle Block 1

Lösung 1.

1. $\log(5) \approx 0.699$
2. $\dfrac{-\log(4)+\log(15)}{-\log(5)+\log(3)} \approx -2.58$
3. $\dfrac{\log(49)-\log(5)}{\log(7)} \approx 1.173$

Lösung 2.

1. $7\,\log_b(b) = 7$
2. $-n\,\log_b(b) = -n$
3. Wenn wir den Ausdruck als x bezeichnen, löst er die Gleichung $(\sqrt{a})^x = a^2$, was gleichbedeutend ist mit $a^{\frac{x}{2}} = a^2$. Quadrieren wir beide Seiten erhalten wir $a^x = a^4$. Somit gilt $x = \log_{\sqrt{a}}(x) = 4$.

Lösung 3.

1. Es gilt $3^6 = 729$ und $3^7 = 2187$. Da $729 < 2180 < 2187$, muss $6 < \log_3(2180) < 7$ gelten.
2. $$\begin{aligned} 3^x &= \frac{1}{\sqrt{3^3}} \\ 3^x &= \frac{1}{3^{\frac{3}{2}}} \\ 3^x &= 3^{-\frac{3}{2}} \\ x &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Lösung 4.

1. $\log(4^3 \cdot 5) = \log(320)$
2. $w\log\left(\frac{v^w}{w^v}\right)$
3. $\log\left(\frac{1}{a\,b}\right)$

Lösung 5.

1. $a^c = x \cdot y$
2. Mit dem Gesetz des Basiswechsels ist dies dasselbe wie $\log_m(n^m) = a$ und die Gleichung dazu lautet $m^a = n^m$.
3. $b^0 = 1 = \frac{a}{c}$