Algebra, Block 02: Exponentielles Wachstum

+4

t	0	1	2	3	4
Bakterien	80				

$\cdot 9$

$\cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^4$

$t = 0 \Rightarrow 20 + 80 \cdot 2^0 = 100$

$20 + 80 \cdot 2^t$: 20 Zombies beissen niemanden.

t: Anzahl mal 20 Minuten

Allgemein wird exponentielles Wachstum / Zerfall durch eine Funktion

$$f(t) = A \cdot b^t \qquad \text{mit } b > 0$$

beschrieben.

A: Anfangswert

b: Wachstumsrate $\quad b > 1$

Zerfallsrate $\quad b < 1$

t: Zeit (mit Masseinheit, b ist von der Einheit abhängig)

Beispiel:

Auf dem Schulhausplatz der KSZ ist ein Zombie. Er beisst alle 20 Minuten einen Nicht-Zombie (wie jeder Zombie).

→ Wann besteht die gesamte Schweizer Bevölkerung aus Zombies?

→ Modell!

$A = 1$

$b = 2^{\frac{1}{20}}$ (t in Minuten) $\qquad f(20) = 1 \cdot q^{20} = 2$

$q = 2^{\frac{1}{20}}$

$f(t) = \left(2^{\frac{1}{20}}\right)^t = 2^{\frac{t}{20}}$ (Wachstumsfunktion)

In Stunden:

$f(t) = 2^{3t}$

Verdoppelungszeit: Wann hat es sich verdoppelt (20 Min)

Halbwertszeit: Wann hat es sich halbiert.

57, 58, 61 Seite 76

HA: 57

Aufgabe 3 (Prüfung)

$b^x = a$

19. September 2016

b)

$$\frac{\log_b(a)}{n} = \log_b(\sqrt[n]{a}) \xrightarrow{\cdot n} b^{n \cdot \log_b(\sqrt[n]{a})} = a$$

$$b^{\frac{\log_b(a)}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$\Big(\underbrace{b^{\log_b(a)}}_{a}\Big)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \checkmark$$

$$\left(b^{\log_b(\sqrt[n]{a})}\right)^n = a$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

$$a^{\frac{1}{n}\cdot n} = a \checkmark$$

57 Die Einwohnerzahl von Afrika nahm von 1980 bis 1985 jährlich um 3 % zu. In der Mitte des Jahrs 1985 betrug sie 555 Millionen.

a) Welches war die Einwohnerzahl Mitte 1980 (auf Millionen genau)?

b) In welchem Jahr wird die Einwohnerzahl bei unveränderter Wachstumsrate die Milliardengrenze überschreiten?

c) Welches ist die Verdoppelungszeit bei unveränderter Wachstumsrate?

a) 479 Mio.

$f(t) = 555 \cdot 1.03^t \quad (\cdot 10^6)$

$f(-5) = 555 \cdot 1.03^{-5} \quad (\cdot 10^6)$

b) 19.92 Jahre

$f(t) = 10^9 = 555 \cdot 1.03^t$

2005 (Bis 19.5 wäre 2004)

c) $2 = \frac{1110}{555} = 1.03^t \Rightarrow 2 = 1.03^t$

$$\frac{\log(2)}{\log(1.03)} = t = 23.45 \text{ Jahre}$$

$$\log(2) = \log\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^{-1}\right)$$
$$= -\log\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

57, 58, 61

$\rightarrow$ Aufgabe 8 aus AM.

57	a) 479 Millionen	b) 2005	c) 23.45 Jahre	
58	a) 89	b) 11.74 Jahre	c) 2023	d) 5.73 %

61	a) 78.43 %	b) 94.76 cm	c) 28.52 cm

---

20. September 2016

Verdoppelungszeit: $t = \frac{\log(2)}{\log(b)}$

b: Wachstumsfaktor.

Halbwertszeit: $t = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log(b)} = \frac{-\log(2)}{\log(b)}$

$$\log_{e^{-2.4}}(0.5) = \ln\left(0.5^{\frac{1}{-2.4}}\right) := \log_e(\quad)$$

$$\left(e^{-2.4}\right)^x = 0.5$$

$$e^{-2.4x} = 0.5 \quad \Big|\ (\,)^{-\frac{1}{2.4}}$$

$$e^x = 0.5^{-\frac{1}{2.4}}$$

$$\ln\left(0.5^{-\frac{1}{2.4}}\right)$$

S. 67/68 Aufg. 21, 26, 27

S. 65: Aufg. 11, 12

Aufgabe 8 (Ü1, AM)

$f(t) := a \cdot b^t + c$ Done

$\text{solve}\left(\begin{cases} f(0)=72 \\ f(1)=62 \\ f(2)=54 \end{cases}, \{a,b,c\}\right)$

$a=50$ and $b=\frac{4}{5}$ and $c=22$

$a \cdot b^0 + c = 72$

$a \cdot b + c = 62$

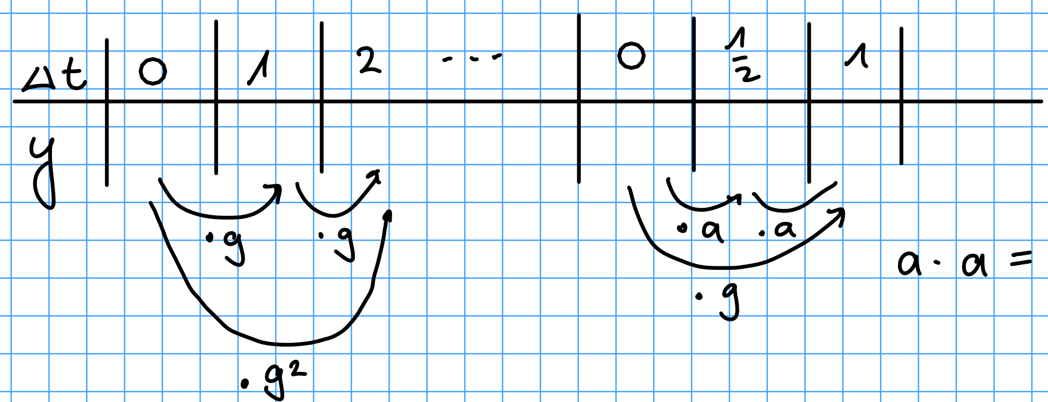
$a \cdot b^2 + c = 50$

---

22. September 2016

Aufgabe 21

$\Delta t = 1 \Rightarrow r = 9$



$a \cdot a = 9 \Rightarrow a = \sqrt{9} = 3$

$\Delta t = 2 \Rightarrow r_2 = 9^2 = 81$ $\quad \Delta t = 3 \Rightarrow 9^3$

$\Delta t = \frac{1}{2} \Rightarrow r_{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$

$\Delta t = \frac{1}{24} \Rightarrow r_{\frac{1}{24}} = 9^{\frac{1}{24}} = 9^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12}} = \sqrt[12]{3}$

11 An einem Neujahrsmorgen finden drei Freunde ein Frankenstück. Der erste frohlockt: "Wenn wir eine Bank fänden, die uns jährlich 100 % Zins gewährte, so hätten wir in einem Jahr bereits 2 Fr." "Wir hätten dann sogar 2.25 Fr.", erwidert der zweite, "wenn wir ein Konto benützen, bei dem jedes Halbjahr aufgezinst wird." "Und bei vierteljährlicher Aufzinsung wären es 2.44 Fr.", ergänzt der dritte.

a) Berechne den Wert am Jahresende, falls nach jedem Monat, jedem Tag, jeder Stunde aufgezinst würde. (1 Jahr = 360 Banktage)

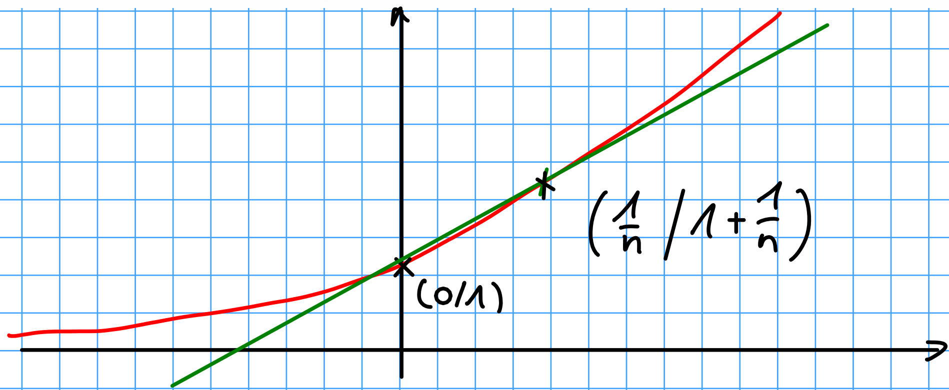
b) Auf welchen Betrag wächst der Franken in einem Jahr bei 100-prozentiger Momentan-Verzinsung an?

12 Gesucht: Exponentialkurve $y = b^x$, welche die Gerade $y = x + 1$ berührt.

a) Die Kurve $y = b^x$ soll die Gerade $y = x + 1$ ausser im Punkt $P(0, 1)$ auch im Punkt $Q\left(\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$ schneiden ($n \in \mathbb{N}$). Berechne b in Abhängigkeit von n.

b) Berechne b für $n = 1,\ 2,\ 5,\ 10,\ 10^2,\ 10^4,\ 10^6$ und 10^8.

c) Welcher besonderen Grenzsituation nähern sich die Exponentialkurven mit den in Teilaufgabe b) berechneten Basen b, wenn n immer grösser wird?



27. September 2016

+ Abschluss Logarithmus.
+ Prüfung vom 31. Oktober

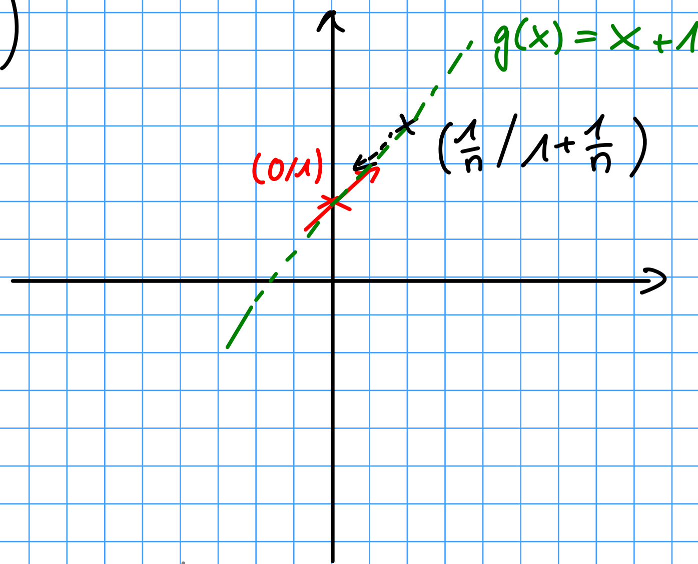
8^{35} Do. → 29.9

(8^{35} Do → 27.10
SAM)

13?
P XX

Aufgabe 12 (S. 66)

$f(x) = b^x$



Anforderung: $(0/1)$ und $\left(\frac{1}{n} / 1 + \frac{1}{n}\right)^{*}$ sollen auf $f(x)$ liegen.

$*$ $g(x) = x + 1$

$g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + 1$

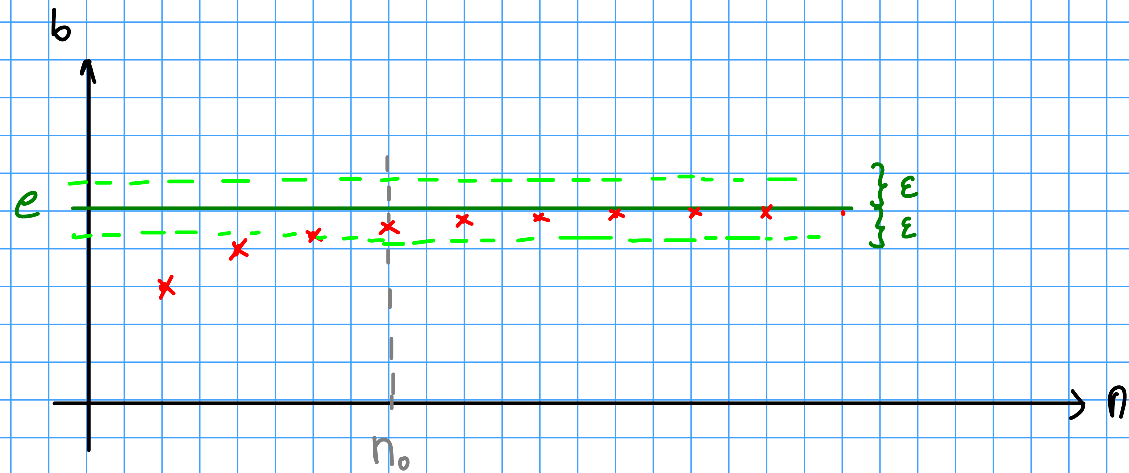
$$1 + \frac{1}{n} = b^{\frac{1}{n}} \quad \Big| \, (\,)^n$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = b$$

$$\boxed{b = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =: e}$$

(Grenzwert der Folge $1, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 \ldots$)

$$b = \lim_{x \to 0} \left(1 + x\right)^{\frac{1}{x}}$$

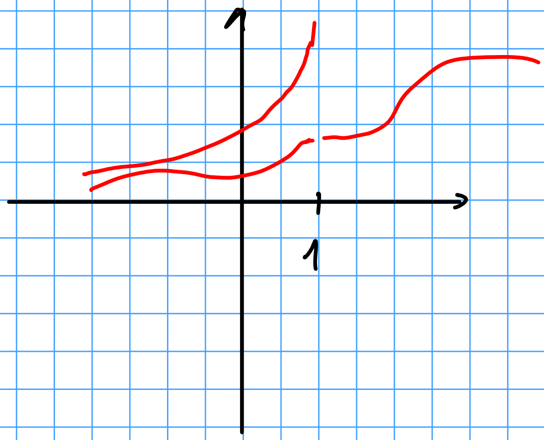


$c = \lim\limits_{n \to \infty} f(n)$ $\qquad \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \quad \forall n > n_0 : \; |c - f(n)| < \varepsilon$

$n \in \mathbb{N}$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n > n_0$ . . .

$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1} =$ $\qquad$ $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$



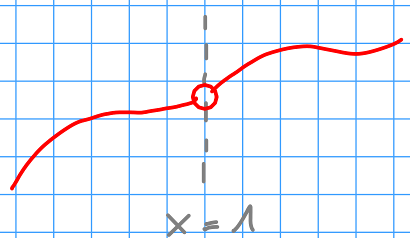
$f(1)$ nicht erlaubt.

$\lim_{x \to 1} f(x) = 0.5$

$\lim_{x \to -1} f(x)$ nicht definiert

$$f(x) = \frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{1}{(x+1)}$$

$x = 1$



$x = -1$