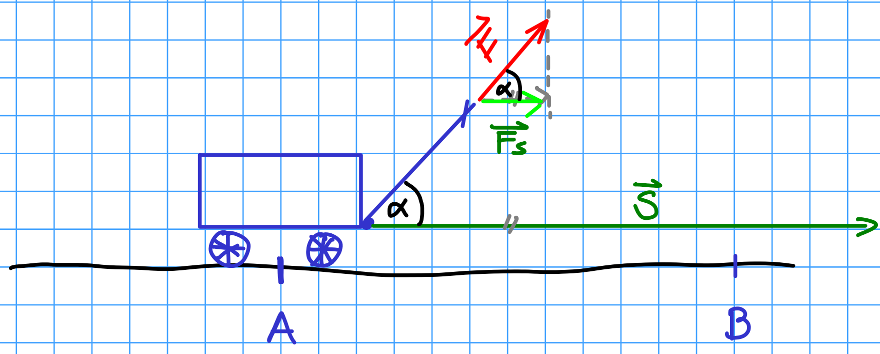
Block 2: Das Skalarprodukt

15. November 2016



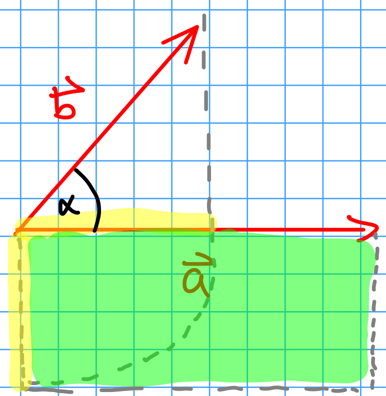
$$W = \|\vec{F_s}\| \cdot \|\vec{s}\|$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\|\vec{F_s}\|}{\|\vec{F}\|}$$

$$W = \cos(\alpha) \cdot \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{s}\|$$

Wie gross ist die verrichtete Arbeit um den Wagen von A nach B zu ziehen?

Das Skalarprodukt



Das Skalarprodukt aus $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist die Länge von $\vec{a}$ multipliziert mit der senkrechten Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} := \quad \cdot \|\vec{a}\| = \cos(\alpha) \cdot \|\vec{b}\| \cdot \|\vec{a}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\alpha)$$

Punkt

$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\alpha)}$$

S. 27 A. 1 a) b)

A. 2 a) b) c)

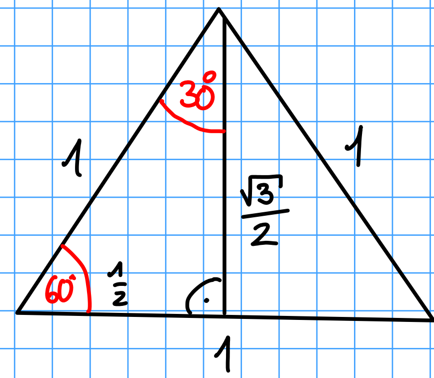
A. 3

Im Buch: $a = \|\vec{a}\|$

$$\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(60^\circ) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

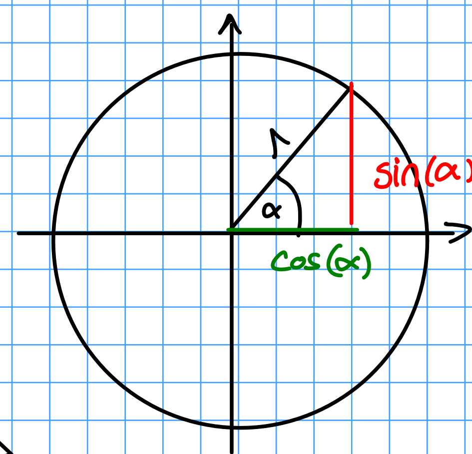


$$\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

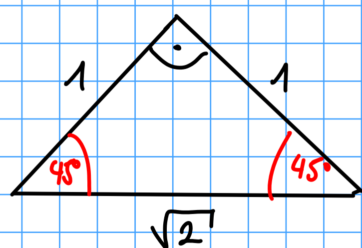
$$\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\cos(120^\circ) = -\cos(60^\circ) = -\frac{1}{2}$$



$$\cos(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\cos(135^\circ) = -\cos(45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha)$$

Aufgabe 3

1. Multiplikation auf $\mathbb{R}$
2. Skalarmultiplikation
3. Skalarprodukt.

b) $$\underset{1}{k}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \overset{?}{=} (\underset{2}{k\vec{a}}) \underset{3}{\cdot} \vec{b}$$

$$\text{①} \qquad \text{②}$$

① $k(\|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \cos(\alpha)) = (k \cdot \|\vec{a}\|) \, \|\vec{b}\| \cos(\alpha)$

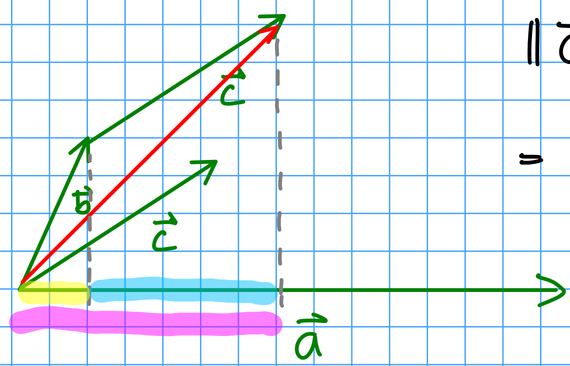
② $\|k \cdot \vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\alpha) = k \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\alpha)$

$$\|k \cdot \vec{a}\| = \left\| k \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(k \cdot a_x)^2 + (k \cdot a_y)^2 + (k \cdot a_z)^2}$$

$$\sqrt{k^2(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)} = k\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = k \cdot \|\vec{a}\|$$

c)

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$$



$$\|\vec{a}\|\cdot \quad = \|\vec{a}\|\cdot(\quad + \quad)$$

$$= \|\vec{a}\| \quad + \|\vec{a}\|\cdot \quad = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$$

---

22. November 2016

Aufgaben 4, 5: Eigenschaften des Skalarprodukt
S. 27

Repetition: Produkt zweier Vektoren, deren Ergebnis ein Skalar ist.
Länge des einen Vektors mal die Projektion des Zweiten auf diesen.

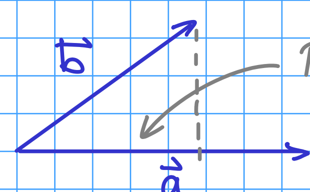
$\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cos(\alpha)$ α: Zwischenwinkel

Aufgabe 4

a) $\vec{a}\cdot\vec{b} \leq \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|$

↳ $\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos(\alpha)$

$\cos(\alpha)$ liegt zwischen 1 und −1.



Projektion wird immer kürzer.

b) $\vec{a}\cdot\vec{a} = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{a}\|\cdot\underbrace{\cos(0°)}_{=1}$

Die Projektion von $\vec{a}$ auf sich selbst ist $\|\vec{a}\|$ lang.

c) $\perp$: Senkrecht zu.

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\underbrace{\cos(90°)}_{=0} = 0$

Auftrag für Donnerstag:

Ziel: Formel für $\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ ohne Winkel

1 Frage: $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ sind die Basisvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Was ist

$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x =$ $\qquad$ $\vec{e}_x \vec{e}_y =$

$\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y =$ $\qquad$ $\vec{e}_y \vec{e}_z =$

...

2. Frage: Es gilt

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$$

Was gibt

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z)\cdot(b_x \vec{e}_x + b_y \cdot \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z) = ?$$

Tipp: Rechengesetze für Skalarprodukt

3. Frage: Löse 8 c) auf S. 28.

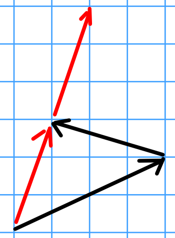
---

28. November 2016

- Hinweise zur Prüfung
- Erkenntnisse vom Auftrag am Donnerstag

Aufgabe 1

a) $2(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{c} + \vec{v} = \vec{0}$

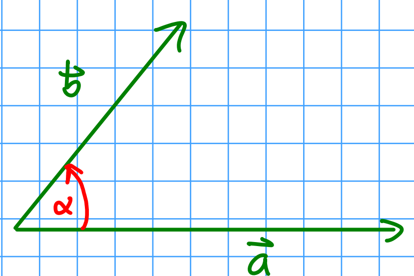


$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \quad \text{(Matrizen)}$$

$$A^T \cdot B = \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \left(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \right)$$

<u>Anwendung:</u> Winkel zwischen zwei Vektoren



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos(\alpha)$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Mit Gleichseten erhaten wir:

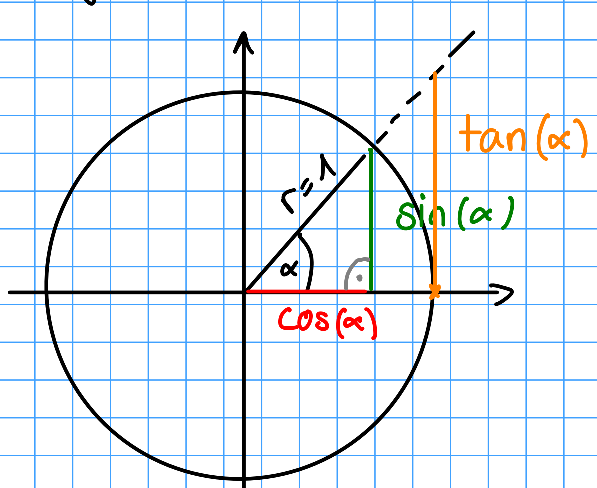
$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z \cdot b_z}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|}}$$

S. 28/29

Aufgabe 12, 13 a), 14

2 Überlegungen:
- ohne TI nspire
- mit TI nspire

Trigonometrie-Repetion:



$$\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1$$

$$\boxed{\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}\right)}$$

$$\frac{\cos^{-1}\left(\frac{\mathrm{dotP}(ab,ac)}{\mathrm{norm}(ab)\cdot\mathrm{norm}(ac)}\right)}{1°} \quad 62.7503$$

$$\frac{\cos^{-1}\left(\frac{\mathrm{dotP}(ab,ac)}{\mathrm{norm}(ab)\cdot\mathrm{norm}(ac)}\right)}{\pi}\cdot 180 \quad 62.7503$$

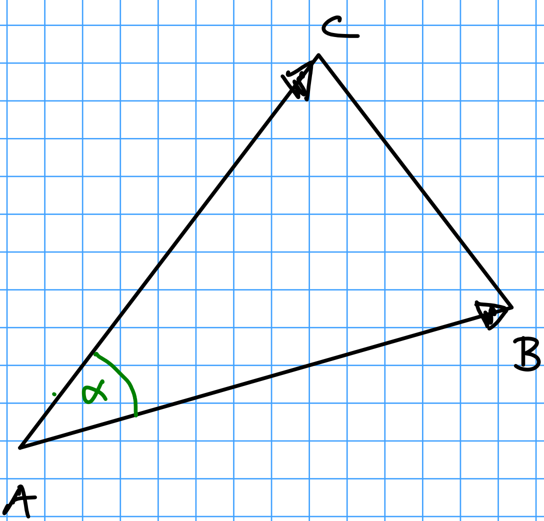
$$\cos^{-1}\left(\frac{(\vec{OB}-\vec{OA})\cdot(\vec{OC}-\vec{OA})}{\|\vec{OB}-\vec{OA}\|\cdot\|\vec{OC}-\vec{OA}\|}\right)$$

$$\overset{TR}{=} 62.75°$$

" $\overset{\text{solve}}{\Longrightarrow}$ "

$$w(a,b,c):=\frac{\cos^{-1}\left(\frac{\mathrm{dotP}(b-a,c-a)}{\mathrm{norm}(b-a)\cdot\mathrm{norm}(c-a)}\right)}{\pi}\cdot \quad \textit{Done}$$

$w(a,b,c)$	62.7503	$\measuredangle$ BAC
$w(b,a,c)$	68.4532	$\measuredangle$ ABC
$w(c,b,a)$	48.7964	$\measuredangle$ BCA



exakt, von Hand

→ 14 b), 15, 17 b), 18 a), 19

Aufgabe 14