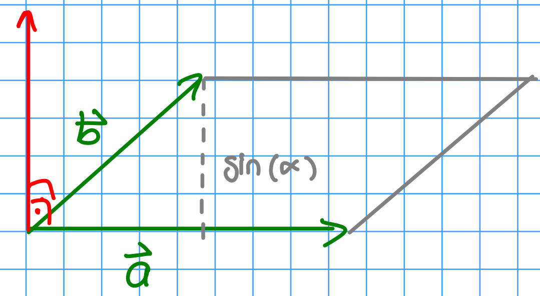
Vektorprodukt

Ziel: Produkt von Vektoren welches einen eindeutigen Vektor ergibt.

$$\vec{a} \times \vec{b} =: \vec{c}$$



1. $\vec{c}$ steht senkrecht zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

2. $\|\vec{c}\|$ ist die Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms (Betragsmässig ohne Einheit)

3. Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

6. Dezember 2016

Antikommutativgesetz: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

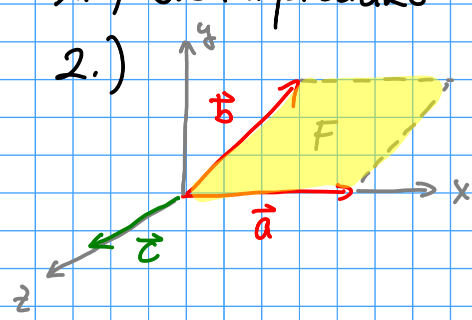
Berechnungsformel:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Beweis

1.) Skalarprodukt

2.)

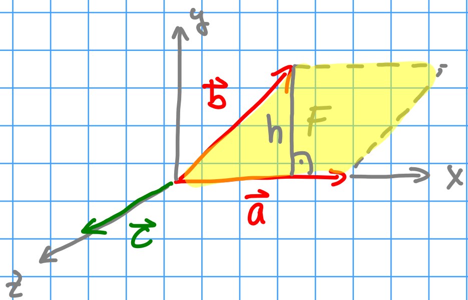


Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)\cdot 7 - 1\cdot(-5) \\ 1\cdot 2 - 3\cdot 7 \\ 3\cdot(-5) - (-2)\cdot(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -19 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Beweis

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \overset{?}{=} 0$$



$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ 0 \end{pmatrix} \qquad F = g \cdot h = a_x \cdot b_y \qquad \|\vec{c}\| \overset{?}{=} F$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{a_x^2} = |a_x|$$

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \left\| \begin{pmatrix} a_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ a_x b_y - 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(a_x b_y)^2} = |a_x b_y| = F$$

Nebenbemerkung

Winkelhalbierender Vektor: $\vec{c} = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \cdot \vec{a} + \frac{1}{\|\vec{b}\|} \cdot \vec{b}$

---

12. Dezember 2016

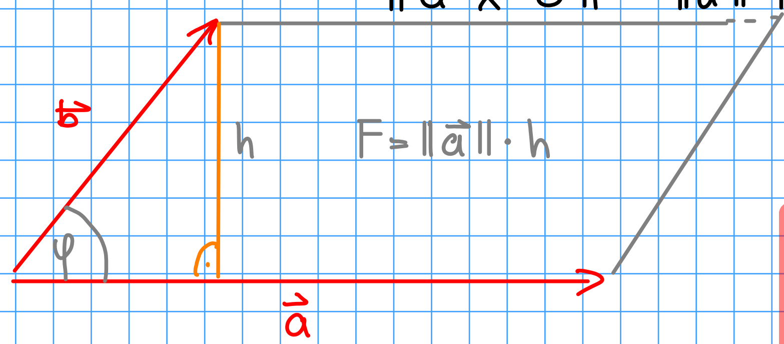
Aufgabe: 51. Aufgabe 6 (inkl. geometrische Begründung)
Aufgabe 7 "
Aufgabe 8, 11, 12 (Formel?), 14, 15, 16 a), 19

Skalarmultiplikation	:	Zahl · Vektor = Vektor	$\lambda \cdot \vec{a}$
Skalarprodukt	:	Vektor • Vektor = Zahl	$\vec{a} \bullet \vec{b}$
Vektorprodukt	:	Vektor × Vektor = Vektor	$\vec{a} \times \vec{b}$

Zu Aufgabe 6: Warum stimmt die Aussage

13. Dezember 2016

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \sin(\varphi)$$



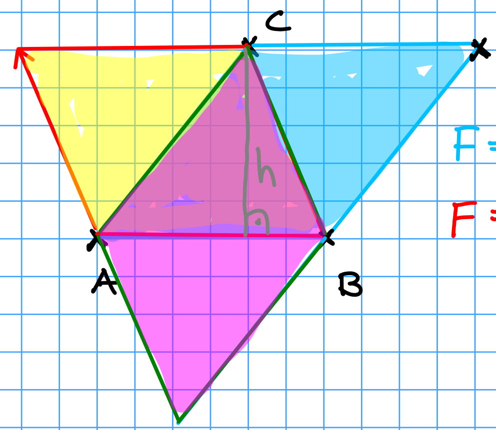
$$F = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$$

$$F = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\varphi)$$

$$\boxed{\varphi = \sin^{-1}\left(\frac{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}\right)}$$

$$\frac{h}{\|\vec{b}\|} = \sin(\varphi) \Rightarrow h = \|\vec{b}\| \cdot \sin(\varphi)$$

Aufgabe 8



$F = h \cdot \overline{AB}$

$F = h \cdot \overline{AB}$

$a := [-5\ \ 3\ \ 3]$	$[-5\ \ 3\ \ 3]$
$b := [1\ \ 5\ \ 8]$	$[1\ \ 5\ \ 8]$
$c := [7\ \ 11\ \ 9]$	$[7\ \ 11\ \ 9]$
$ab := b - a$	$[6\ \ 2\ \ 5]$
$ac := c - a$	$[12\ \ 8\ \ 6]$
crossP(ab, ac)	$[-28\ \ 24\ \ 24]$
norm$([-28\ \ 24\ \ 24])$	44

Aufgabe 11

① $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \vec{0}$

② $\exists s : s \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$

③ $|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}| = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\|$ weil $\cos(180°) = -1$ oder $\cos(0°) = 1$

---

15. Dezember 2016

Aufgabe 12 a) ohne TR
b) mit TR

Aufgabe 14
Aufgabe 15
Aufgabe 16 a)

Aufgabe 13.

S. 52/53

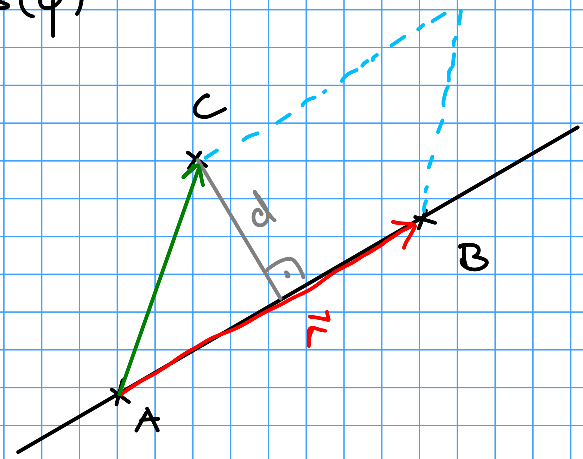
$$\left\| \lambda \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(\lambda a_x)^2 + (\lambda a_y)^2 + (\lambda a_z)^2} = \sqrt{\lambda^2 (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)}$$

$$\lambda \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \lambda \cdot \left\| \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \right\|$$

Aufgabe 14

$$\frac{\|\vec{a}\times\vec{b}\|}{\vec{a}\cdot\vec{b}} = \frac{\cancel{\|\vec{a}\|}\cdot\cancel{\|\vec{b}\|}\cdot\sin(\varphi)}{\cancel{\|\vec{a}\|}\cdot\cancel{\|\vec{b}\|}\cdot\cos(\varphi)} = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \tan(\varphi)$$

Aufgabe 15



$$F = \|\vec{r}\times\vec{AC}\| = \|r\|\cdot d$$

$$\boxed{d = \frac{\|\vec{r}\times\vec{AC}\|}{\|\vec{r}\|}}$$

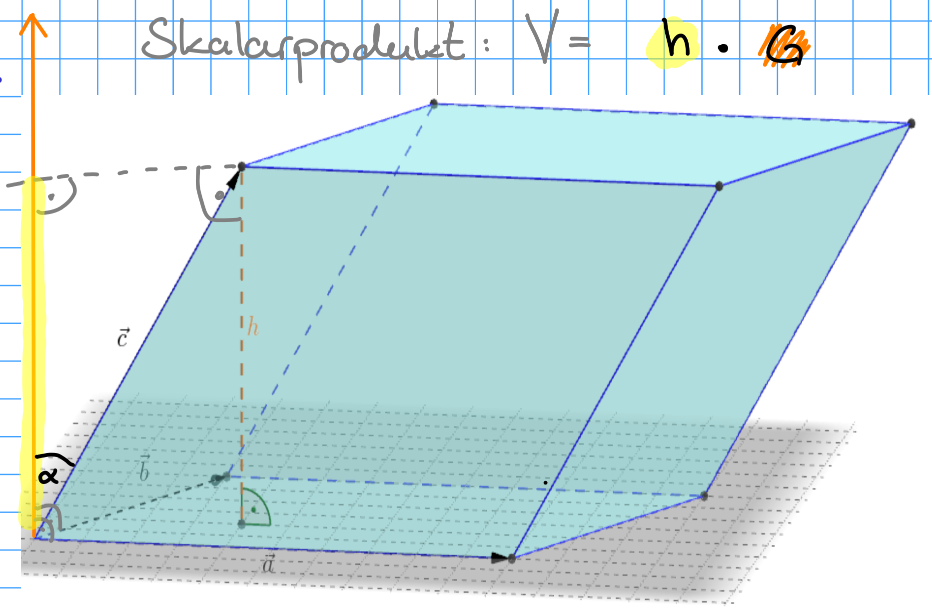
Volumen eines Spates:

(Spat: Alle Seiten sind Parallelogramme)

$$\boxed{V = |(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\,|}$$

Skalarprodukt

Skalarprodukt: $V = h \cdot G$



$$V = G\cdot h$$

$$= \|\vec{a}\times\vec{b}\|\cdot\overbrace{\|\vec{c}\,\|\cdot\cos(\alpha)}^{h}$$

$$= \|\vec{a}\times\vec{b}\|\cdot h$$

Was bedeutet $\vec{a}\times\vec{b}$

19. Dezember 2016

Skalarprodukt: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\cdot\underbrace{\|\vec{b}\|\cdot\cos(\alpha)}_{\text{Schatten des } \vec{b} \text{ auf } \vec{a}}$

Von Hand

→ 20 a) b) eine mit TR

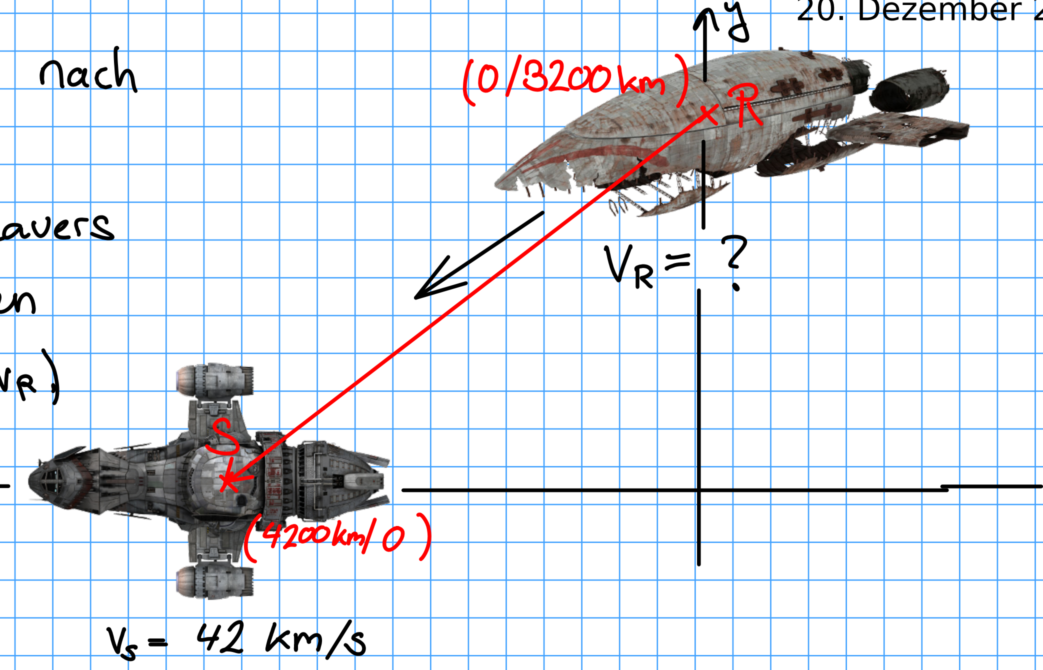
21 a) b) Koplanar = liegen in derselben Ebene

24 a) b) eine mit TR

TR

1. Wo ist Serenity nach t Sekunden

2. Wo sind die Reavers nach t Sekunden (abhängig von v_R)



1. $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4200 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 42 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Zu Beginn: $\vec{V}_R = \lambda \cdot \overrightarrow{RS}$ $\qquad \lambda = \frac{V_R}{\|\overrightarrow{RS}\|}$

$$\vec{V}_R = \lambda\left(\overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OR}\right) = \begin{pmatrix} 4200 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 42 \\ 0 \end{pmatrix} - \text{„Irgend etwas rekursives"}$$

Zwischen 0 und 1 Sekunden: $t \in [0, 1[$

$$\begin{pmatrix} 4200 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 - \begin{pmatrix} 0 \\ 3200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4200 \\ -3200 \end{pmatrix}$$

Auf Länge V_R bringen:

$$\vec{V}_R = \frac{V_R}{\sqrt{4200^2 + 3200^2}} \begin{pmatrix} 4200 \\ -3200 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3200 \end{pmatrix} + \frac{V_R \cdot t}{\sqrt{21^2 + 16^2}} \begin{pmatrix} 21 \\ -16 \end{pmatrix}$$

Zwischen 1 und 2 Sekunden: $t \in [1, 2[$

$$\vec{V_R} = \frac{V_R}{\text{Länge}} \left(\begin{pmatrix} 4200 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 42 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3200 \end{pmatrix} - \frac{V_R}{\sqrt{21^2+16^2}} \begin{pmatrix} 21 \\ -16 \end{pmatrix} \right)$$