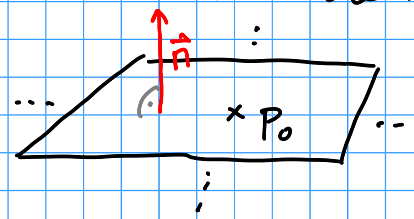
Block 05: Ebenen

30. Januar 2017

Eine Ebene ist eindeutig bestimmt durch:

- Drei Punkte, welche nicht auf einer Geraden liegen.
- Einen Punkt und zwei nicht kollineare Vektoren
- Eine Gerade und ein zum Richtungsvektor nicht kollinearer Vektor.
- Zwei sich in genau einem Punkt schneidende Geraden. (nicht identisch.)
- Eine Gerade und ein Punkt, der nicht auf der Gerade liegt.
- Zwei parallele Geraden
- Einen Vektor und einen Punkt
  ↳ Normalenvektor (senkrecht zur Ebene)

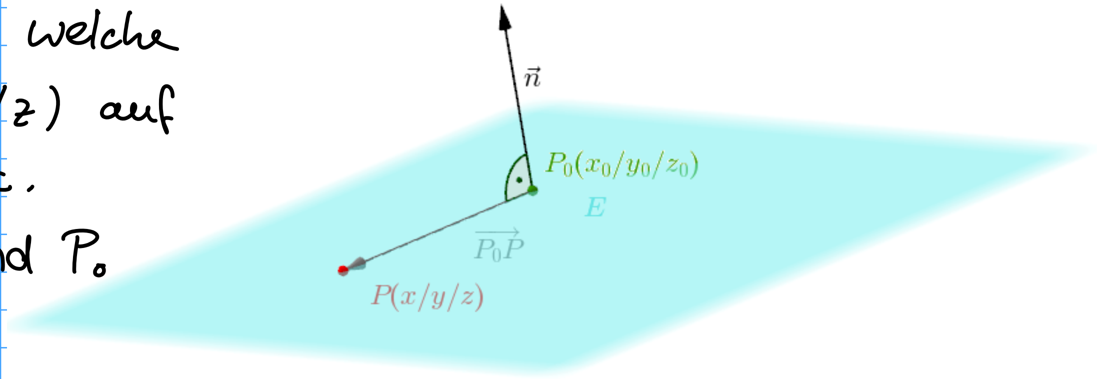


Definition Ebene: Ein Punktemenge, welche in zwei Dimensionen unendlich ausgedehnt ist und in die dritte keine Ausdehnung besitzt.

Die Normalen- und Koordinatenform der Ebene

$y = mx + q$

Gesucht: Gleichung, welche prüft, ob $P(x/y/z)$ auf der Ebene E liegt.
E ist durch $\vec{n}$ und P_0 definiert.



$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

$$\vec{n}\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}\right) = 0 \qquad \text{oder} \qquad \vec{n}\,\overrightarrow{OP} = \vec{n}\,\overrightarrow{OP_0}$$

$$\boxed{\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\vec{n} \cdot \overrightarrow{OP_0}}_{\text{Zahl}}}$$

Normalenform

Wir definieren $\vec{n} =: \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ax + by + cz \qquad \Big| \qquad d := \vec{n} \cdot \overrightarrow{OP_0}$$

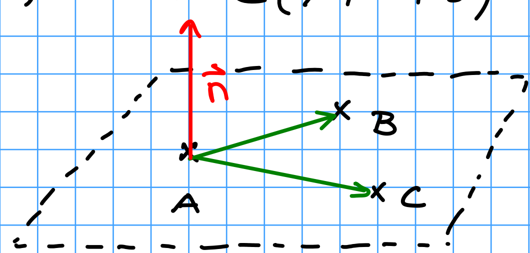
Koordinatenform:

$$\boxed{ax + by + cz = d}$$

Beispiel: $A(1/0/1)$, $B(2/1/1)$ und $C(1/2/2)$

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{array}$$



$$1x - 1y + 2z = d \Rightarrow \quad x - y + 2z = d$$

Gemäss Definition:

$d = \vec{n} \cdot \vec{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

oder $\vec{OB} / \vec{OC}$

$= 1 + 0 + 2 = 3$

Punkt oben einsetzen)

$1 - 0 + 2 \cdot (1) = 3$

$x - y + 2z = 3$

$\underline{\underline{E: x - y + 2z - 3 = 0}}$

Liegt $P(1/-1/0)$ auf der Ebene?

$1 - 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = 1 + 1 = 2 \neq 3$

$\Rightarrow$ P liegt nicht auf E

---

20. Februar 2017

→ 6.3: Block 4, Geraden

+ Prüfungstermine und Lernziele
+ Kurzrepetition: Was wissen wir schon über Ebenen?

Aufgaben zu Ebenen:

Normal und Senkrecht sind hier synonym.

Teil 1: S. 35: 1 a), 2 a), 4 a), 5 c),
S. 40: 1 a), 2 a), 3
S. 36: 6 b), 7, 8 a), 9 a) d), 12 c) e) f)
S. 37: 13, 14, 15 c) e) - h)

Parameterform: S. 38: 16 b), 17

---

21. Februar 2017

+ Aufgabe zusammen mit TR lösen
+ Übungslektion zu Ebenen

Aufgabe 1

c)

$a:=[2\ \ 5\ \ 4]$	$[2\ \ 5\ \ 4]$
$b:=[7\ \ 0\ \ -3]$	$[7\ \ 0\ \ -3]$
$c:=[-8\ \ -5\ \ 2]$	$[-8\ \ -5\ \ 2]$
$na:=\text{crossP}(a-b,c-b)$	$[60\ \ -80\ \ 100]$
$n:=\frac{na}{20}$	$[3\ \ -4\ \ 5]$
$d:=\text{dotP}(n,a)$	6
$\text{dotP}(n,[x\ \ y\ \ z])=d$	$3\cdot x-4\cdot y+5\cdot z=6$

$$\vec{n}' = \left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right) \times \left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\right) \overset{TR}{=} \begin{pmatrix} 60 \\ -80 \\ 100 \end{pmatrix}$$

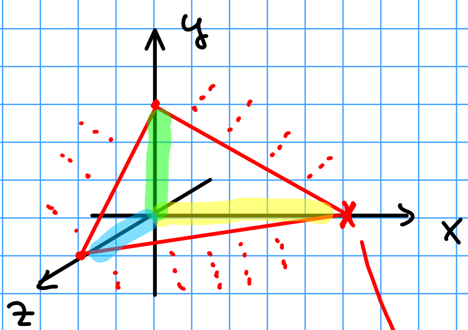
$$\vec{n} = \frac{\vec{n}'}{20} \overset{TR}{=} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$d = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OA} \overset{TR}{=} 6$$

$$3x - 4y + 5z = 6$$

Achsenabschnitte und die Achsenabschnittsform

23. Februar 2017



x - Achsenabschnitt A_x

y - " A_y

z - " A_z

Berechnen: $P(A_x / 0 / 0)$

$$aA_x + b0 + c0 = d \Rightarrow aA_x = d \Rightarrow A_x = \frac{d}{a}$$

$$A_y = \frac{d}{b}; \quad A_z = \frac{d}{c}.$$

→ 9, 11, 12 S.36

Ziel: Ebenengleichung mit A_x, A_y und A_z drin.

11. Wie heisst die Koordinatengleichung der Ebene mit den Achsenabschnitten ~~x = a~~, ~~y = b~~ und ~~z = c~~? Dividiere danach die Gleichung durch abc.

A_x A_y A_z ⇒ Koordinatengleichung, welche nur von A_x, A_y und A_z abhängig ist.

Ausgangslage: $ax + by + cz = d$

Andere Formulierung: Ebene durch $P_1(A_x/0/0)$
$P_2(0/A_y/0)$
$P_3(0/0/A_z)$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -A_x \\ A_y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -A_x \\ 0 \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_y A_z \\ A_x A_z \\ A_x A_y \end{pmatrix}$$

$$A_y A_z X + A_x A_z y + A_x A_y z = d$$

$$A_y A_z A_x + 0 + 0 = d$$

$$A_y A_z x + A_x A_z y + A_x A_y z = A_x A_y A_z \quad | : A_x A_y A_z$$

$$\boxed{\frac{x}{A_x} + \frac{y}{A_y} + \frac{z}{A_z} = 1}$$

Alternative: $a = \frac{d}{A_x}$ $\quad b = \frac{d}{A_y}$ $\quad c = \frac{d}{A_z}$

$$\frac{d}{A_x} \cdot x + \frac{d}{A_y} \cdot y + \frac{d}{A_z} \cdot z = d \quad | : d$$

$$\frac{x}{A_x} + \frac{y}{A_y} + \frac{z}{A_z} = 1$$

Aufgabe 12

a) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1 \quad | \cdot \text{kgV}(2,3) = 6$

$3x + 2y + 2z = 6$

Prüfung 13.4: Problem

Spuren:

Spurpunkt – Schnittpunkte einer Geraden mit einer Koordinatenebene

Spurgeraden – Schnittgeraden einer Ebene mit ...

Spurkreis – Schnittmenge einer Kugel mit ...

Doppelbrüche auflösen.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{1}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{b \cdot c}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

$\boxed{\text{HA: 13}}$

Aufgabe 13 S. 37

b) $E: 3x + By + Cz = 24$

① $A_y = A_z - 3$

$A_y + 3 = A_z$

② $A_y \cdot A_z = 40$

grösser

„... mal kleiner als"

→ Multiplikation / Division.

„um ... kleiner / grösser."

→ Addition / Subtraktion.

① in ② einsetzen: $(A_z - 3) A_z = 40 \Rightarrow A_z^2 - 3A_z = 40$

$$A_z^2 - 3A_z - 40 = (A_z - 8)(A_z + 5) = 0$$

$\boxed{A_z = 8}$ oder $\boxed{A_z = -5}$

$\boxed{A_y = 5}$ oder $\boxed{A_y = -8}$

$$\frac{x}{A_x} + \frac{y}{A_y} + \frac{z}{A_z} = 1$$

$P(A_x / 0 / 0)$

$$3A_x + B \cdot 0 + C \cdot 0 = 24$$

$$A_x = \frac{24}{3} = 8$$

$$\frac{x}{8} + \frac{y}{5} + \frac{z}{8} = 1 \quad \Big| \cdot 40$$

$$\frac{x}{8} + \frac{y}{-8} + \frac{z}{-5} = 1$$

$\cdot 24$

$$5x + 8y + 5z = 40$$

$$5x - 5y - 8z = 40$$

$$3x + \frac{24}{5}y + 3z = 24$$

$$3x - 3y - \frac{24}{5}z = 24$$

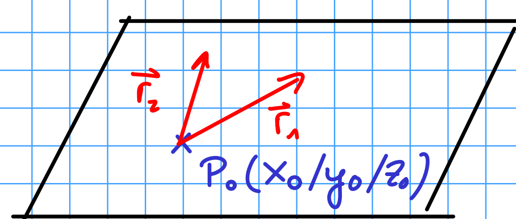
$B = \frac{24}{5} \quad C = 3$

$B = -3 \quad C = -\frac{24}{5}$

9. März 2017

Parameterform der Ebene

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + s\vec{r}_1 + t \cdot \vec{r}_2$$



$\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ dürfen nicht kollinear sein

→ 16 b) 17. → 19, 20, 21

HA: Bis 19

Aufgabe 16

a)
$$\left|\begin{array}{l} 2 = 1 - u + 4v \\ 4 = 2 + 2u - 4v \\ 1 = -2 + 2u - 3v \end{array}\right|$$

(+): $6 = 3 + u \Rightarrow u = 6 - 3 = 3$

$2 = 1 - 3 + 4v \Rightarrow 4 = 4v \Rightarrow v = 1$

Prüfen in : $1 = -2 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 1$ ✓

$\Rightarrow$ A liegt auf E.