Lösung 1.

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Die Gerade muss durch den Punkt $P(-3/0/0)$ gehen. Es gilt also

$$\vec{r'} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Da die Länge des Richtungsvektors irrelevant ist, können wir den Richtungsvektor noch halbieren und erhalten die Geradengleichung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

c) Nein, der Punkt liegt nicht auf der Gerade. Dies kann mit einem Gleichungssystem gezeigt werden. Wir betrachten dazu

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{lcc} 0 & = & -1 - 2s \\ -5 & = & -2 + 6s \\ 4 & = & 4 - 4s \end{array} \right|$$

Aus der letzten Zeile erhalten wir $s = 0$. Es ist aber

$$-5 \neq -2 + 6 \cdot 0$$

Also liegt der Punkt nicht auf g.

Lösung 2.

a) Wir berechnen den Winkel zwischen den beiden Richtungsvektoren:

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\|} \right) = \cos^{-1}\left(\frac{25}{\sqrt{70}\sqrt{29}} \right) \approx 56.298^\circ$$

b) Ein Punkt auf der y-Achse hat die Koordinaten $P(0/y/0)$. Für die x-Koordinate muss $0 = -2 + 3s$ gelten, also $s = \frac{2}{3}$.

Wir prüfen, ob dies auch die Gleichung für die z-Koordinate erfüllt:

$$0 = 4 - 6 \cdot \frac{2}{4}$$

Also schneidet die Gerade die x-Achse.

Lösung 3.

a) Wir suchen alle Punkte Q mit

$$Q \in g \wedge \overrightarrow{P_1Q} \cdot \overrightarrow{P_2Q} = 0$$

Es gilt $Q(-4 - s/7 + 3s/3)$.

Weiter ist

$$\overrightarrow{P_1Q} \cdot \overrightarrow{P_2Q} = 10s^2 + 64s + 88 = 0$$

Mit der quadratischen Lösungsformel oder dem Taschenrechner erhalten wir $s = -\frac{22}{5}$ oder $s = -2$.

Somit gibt es zwei Punkte

$$Q_1\left(\frac{2}{5}/-\frac{31}{5}/3\right) \quad \text{und} \quad Q_2(-2/1/3)$$

b) Die forderung, dass die gesuchte Gerade g schneidet, erfüllen wir am einfachsten, in dem wir den Stützvektor von g übernehmen.

Einen Richtungsvektor können wir mit dem Vektorprodukt ermitteln:

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ -5 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Also erhalten wir die Geradengleichung

$$h : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -15 \\ -5 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Lösung 4.

a) Wir müssen den Abstand der Punkte $P_1(-13/11/9)$ und $P_2(2/6/-3)$ berechnen. Wir erhalten $\|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \sqrt{394} \approx 19.85$.

b) Die Schnittpunkte haben dieselbe z-Koordinate. Es gelten also die Gleichungen:

$$\left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\| = 5 \quad \text{und} \quad 5 + 4s = -7 + 4t$$

Dabei sind $P_1 \in g$ und $P_2 \in h$.

Dies ergibt $s = -2$ oder $s = -1$ und somit $z = -3$ oder $z = 1$.