Lösung 1.

a) Wir berechnen

$$\det\left(\begin{pmatrix}5-\lambda & 2\\ -7 & -4-\lambda\end{pmatrix}\right) = (5-\lambda)(-4-\lambda) - 14 = 0$$

Das charakterischstische Polynom ist also $\lambda^2 - \lambda + 6 = 0$. Mit dem Klammeransatz findet man die Eigenwerte:

$$(\lambda+2)(\lambda-3) = 0$$

Also ist $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 3$.

b) Wir berechnen

$$\begin{pmatrix}2 & 2\\ -7 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_x\\ v_y\end{pmatrix} = \vec{0}$$

Daraus folgt, dass $v_x = -v_y$. Wir wählen $v_x = 1$ und $v_y = -1$. Es gilt $\|\vec{v}\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Somit ist der gesuchte Vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

Lösung 2.

a)

$$M_1 = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$M_{tot} = M_3 \cdot M_2 \cdot M_1 = \begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{3}\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

b) Wenn man das Dreieck skizziert sieht man, dass es sich um ein rechtwinkliges Dreieck handelt. Es gilt

$$F = \frac{4\cdot 2}{2} = 4$$

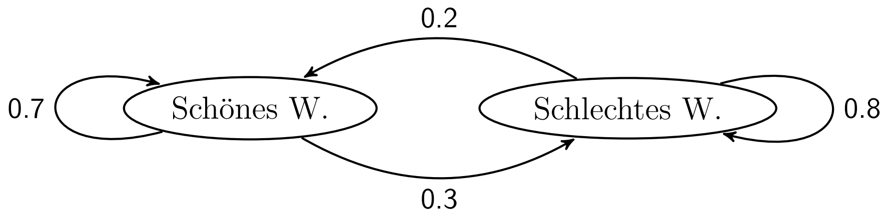
Wenn man die Matrix zur Verfügung hat, muss man nur noch die Determinante berechnen:

$$\det(M) = \frac{2}{3}$$

Also ist $F' = 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$.

Lösung 3.

a)



b)

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix}$$

c)

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0.35 \\ 0.65 \end{pmatrix}$$

Lösung 4.

a) Wenn man das Quadrat um den Vektor $-\binom{1}{2}$ in den Ursprung verschiebt, findet man über die Einheitsvektoren die Transformationsmatrix:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Translationsvektor ist:

$$\vec{v} = -M\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also ist die Abbildung

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Hier wird um den Punkt (1/1) rotiert, um die Matrix zu finden müssen wir um $-\binom{1}{1}$ verschieben. So gilt

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Translationsvektor ist

$$\vec{v} = -M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Also ist die Abbildung

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$