Lösung 1.

a)

$$\vec{n} = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 134 \\ -67 \\ -201 \end{pmatrix}$$

$$d = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OA} = 402$$

$$134x - 67y - 201z = 402$$

Nicht verlangt für die volle Punktzahl, aber dennoch schöner: Gesamte Gleichung durch 67 teilen:

$$2x - y - 3z = 6$$

b)

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d = -1 - 8(-2) = 15$$

$$x - 8y = 15$$

Lösung 2.

a)

$$\vec{r'} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -32 \\ -36 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = \frac{1}{4} \cdot \vec{r'} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Wir können durch addieren respektive subtrahieren der Gleichungen jeweils x respektive z eliminieren und erhalten:

$$x = \frac{5y}{8} + 2, \quad z = \frac{9y}{8} - 3$$

Wir wählen $y = 0$ und erhalten so $x = 2$ und $z = -3$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ -9 \end{pmatrix}$$

b)

$$\|\vec{n_1}\| = 9, \quad \|\vec{n_2}\| = 6$$

$$\begin{aligned} \frac{4x+7y-4z-20}{9} &= \frac{4x-2y+4z+4}{6} && \mid \cdot 18 \\ 8x+14y-8z-40 &= 12x-6y+12z+12 && \mid -8x \; -14y \; +8z \; -12 \\ -52 &= 4x-20y+20z && \mid : 4 \\ -13 &= x-5y+5z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{4x+7y-4z-20}{9} &= -\frac{4x-2y+4z+4}{6} && \mid \cdot 18 \\ 8x+14y-8z-40 &= -12x+6y-12z-12 && \mid -8x \; -14y \; +8z \; +12 \\ -28 &= -20x-8y-4z && \mid : 4 \\ -7 &= -5x-2y-z \end{aligned}$$

$$x-5y+5z = -13 \quad \text{und} \quad 5x+2y+z = 7$$

Lösung 3.

a) Das heisst, dass sich der Normalenvektors des Spiegels ändern kann, aber der Punkt R im Spiegel bleibt.

$$\|\overrightarrow{RP}\| = 14, \quad \|\overrightarrow{RQ}\| = 21$$

$$\vec{n'} = 3 \cdot \overrightarrow{RP} + 2 \cdot \overrightarrow{RQ} = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \\ -54 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \frac{1}{6} \cdot \vec{n'} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$d = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OR} = -5$$

$$4x + y - 9z = -5$$

b)

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OR}\right) = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$d = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OM} = -34$$

$$-2x + 3y - z = -34$$

Lösung 4.

a)

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\alpha' = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP}}{\|\vec{n}\| \cdot \left\|\overrightarrow{AP}\right\|}\right) = 112.589°$$

$$\alpha = |90° - \alpha'| = 22.59°$$

b)

$$h = \frac{3 \cdot 26 \cdot 2}{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|} = 12$$

S liegt also auf einer Parallelebene zur Ebene ABC.

$$d = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OA} = -108$$

$$3x - 4y + 12z - 108 = 12 \cdot \|\vec{n}\| = 12 \cdot 13 = 156$$

$$E:\ 3x - 4y + 12z = 264$$

Nun schneiden wir die Gerade AP mit E:

$$g:\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Gleichung $g \cup E$ ergibt $s = 4$ und führt zum Punkt

$$S(-24/27/-7)$$