Lineare Algebra

- Lineare Gleichungen : $2x = 4$

- Rechnen mit Matrizen (Mehrzahl von Matrix)
- Lineare Abbildungen: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (2-Dimensionaler Vektorraum)
  - Drehung
  - Spiegelung (Achsen / Punkt) ?
  - Vergrösserung
  - Verschiebung
  - Zentrische Streckung
  - Strecken in eine Richtung

Matrizen

Definition: Eine Matrix ist eine rechteckige Tabelle von Zahlen mit m Zeilen und n Spalten. Die einzelnen Zahlen nennen wir Komponenten

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & a_{i,j} & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

$a_{i,j}$ mit $i \in \{1, .., m\}$ und $j \in \{1, ... n\}$

Einführendes Beispiel

R_i : Rohstoffe.

Z_i : Zwischenprodukte.

E_i : Endprodukte.

$$
\begin{pmatrix}
\begin{array}{c|ccccc}
 & Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 & Z_5 \\
\hline
R_1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\
R_2 & 1 & 0 & 4 & 2 & 0 \\
R_3 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
R_4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2
\end{array}
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix}
\begin{array}{c|ccc}
 & E_1 & E_2 & E_2 \\
\hline
Z_1 & 2 & 0 & 1 \\
Z_2 & 1 & 1 & 2 \\
Z_3 & 0 & 3 & 1 \\
Z_4 & 1 & 0 & 4 \\
Z_5 & 0 & 1 & 0
\end{array}
\end{pmatrix}
=
$$

	$E_{\cdot 1}$	$E_{\cdot 2}$	E_3
R_1	$\boxed{4}$		
R_2	$\boxed{4}$		
R_3	7	$\boxed{4}$	
R_4	1		

$1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 0$

$1\cdot 2 + 0\cdot 1 + 4\cdot 0 + 2\cdot 1 + 0\cdot 0$

$3\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot 3 + 0\cdot 0 + 0\cdot 1$

	E_1	E_2
R_2	1	3
$R_{\cancel{x}}$ 4	2	1

$\longrightarrow$

	$E_{\cdot 1}$	$E_{\cdot 2}$	E_3
R_1	$\boxed{4}$		
R_2	$\boxed{4}$ +1	+3	
R_3	7	$\boxed{4}$	
R_4	1 +2		

Matrix - Operationen

Für eine Matrix A gibt es

Skalarmultiplikation: λA
Addition mit B: $A + B$
} wie bei Vektor

↳ Müssen gleich gross sein => Gleiche Anz. Spalten + Zeilen.

Beispiel:

$$
\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}
$$

Transponierte Matrix

Die transponierte Matrix B von A ist definiert durch $b_{i,j} := a_{j,i}$. $\quad A^T := B$

Beispiel:

$a_{1,2}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$b_{2,1}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 3 & 5 & 11 \end{pmatrix} \qquad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$$

Multiplikation von Matrizen

A: $m \times n$-Matrix

B: $n \times \ell$-Matrix

$A \cdot B$: $m \times \ell$-Matrix

$$A \cdot B = m\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}}_{n} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,\ell} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{\ell,1} & \cdots & b_{\ell,m} \end{pmatrix}}_{\ell} \right\} n$$

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} \cdot b_{k,j}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot(-1) & 11\cdot 1 + 2\cdot 2 \\ 3\cdot 5 + 7\cdot(-1) & 3\cdot 11 + 7\cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 15 \\ 8 & 47 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$A \cdot B \Rightarrow$ nicht definiert

$$A^T \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B^T = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 & 21 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$$

28. November 2016

Als Hilfe die zweite Matrix nach oben versetzt:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrix auf dem TR transponieren:

$\boxed{\text{Menu}}$ $\boxed{7}$ $\boxed{2}$

+ Welche Eigenschaften gelten für die Matrixmultiplikation?

- Die Matrix-Multiplikation ist nicht kommutativ.

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

- Assoziativgesetz: $(A \cdot B) \cdot C \overset{?}{=} A \cdot (B \cdot C)$ ① ~~Nein~~ Ja

  $\lambda(A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B$ ② ~~Nein~~ Ja

- Distributivgesetz: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ ③ Ja

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} \end{array}$$

①

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix} & wae + wbg + yaf + ybh \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} ew+fy & ex+fz \\ gw+hy & gx+hz \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & aew + afy + bgw + bhy \end{array}$$

②

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix} \qquad (\lambda A) \cdot B = \begin{pmatrix} \overset{\lambda(ae+bg)}{\lambda ae + \lambda bg} & \lambda af + \lambda bh \\ \lambda ce + \lambda dg & \lambda cf + \lambda dh \end{pmatrix}$$

$= \lambda(A \cdot B)$

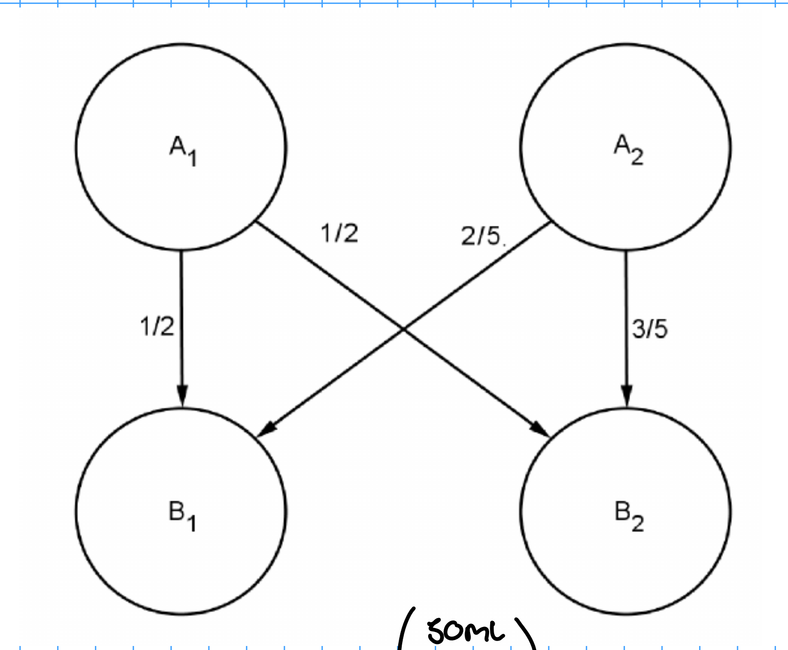
Skalarmultiplikation

(3) $A(B+C) \overset{?}{=} AB + AC$

Aufgabe 3

$$\begin{array}{c} \\ \text{Schere} \\ \text{Stein} \\ \text{Papier} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Sch.} & \text{St.} & \text{P.} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4



$$\begin{array}{c|cc} & B_1 & B_2 \\ \hline A_1 & \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} \\ A_2 & \tfrac{2}{5} & \tfrac{3}{5} \end{array}$$

transponieren

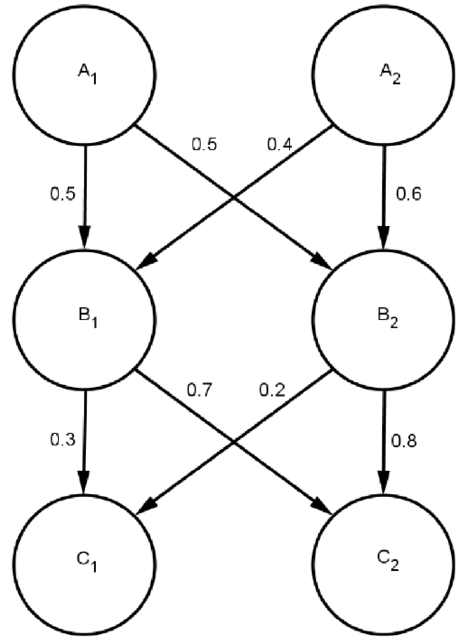
$$\begin{array}{c|cc} & A_1 & A_2 \\ \hline B_1 & \tfrac{1}{2} & \tfrac{2}{5} \\ B_2 & \tfrac{1}{2} & \tfrac{3}{5} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{pmatrix} 50ml \\ 20ml \end{pmatrix}$$

Wie viel B_1 und B_2 erhalte ?

$$\begin{pmatrix} \tfrac{1}{2} & \tfrac{2}{5} \\ \tfrac{1}{2} & \tfrac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50ml \\ 20ml \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tfrac{1}{2} 50ml + \tfrac{2}{5} \cdot 20ml \\ \tfrac{1}{2} 50m + \tfrac{3}{5}\, 20ml \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33ml \\ 37ml \end{pmatrix}$$

5. Bei einem Mischprozess werden die Flüssigkeiten zweimal umgefüllt. Die einzelnen Mischungsverhältnisse sind der Skizze zu entnehmen. Wie kann der Übergang von A_1 , A_2 zu C_1, C_2 mit Hilfe einer Matrix dargestellt werden? Beschreibe dazu die Übergänge von A_1 , A_2 zu B_1 , B_2 und von B_1, B_2 zu C_1, C_2 zuerst einzeln mit je einer Matrix.



$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 70ml \\ 42ml \end{pmatrix} & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \end{array}$$

$$M_{AB} = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 \\ 0.5 & 0.6 \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{cc} A_1 & A_2 \end{array} \end{array}$$

$$M_{BC} = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.7 & 0.8 \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 \\ 0.5 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$M_{AC} = M_{BC} \cdot M_{AB} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.7 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 \cdot 0.3 + 0.5 \cdot 0.2 & 0.4 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.6 \\ 0.5 \cdot 0.7 + 0.5 \cdot 0.8 & 0.4 \cdot 0.7 + 0.6 \cdot 0.8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.25 & 0.24 \\ 0.75 & 0.76 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 70ml \\ 42ml \end{pmatrix}$$

$$M_{AC} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.24 \\ 0.75 & 0.76 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 27.58ml \\ 84.42\,ml \end{pmatrix}$$

$M_{BC} \cdot M_{AB} \cdot \vec{v}$

$\vec{v}$ → Vektor mit Mengen in A_1, A_2

$M_{AB} \cdot \vec{v}$ → Vektor mit Mengen in B_1 B_2

$M_{BC} \cdot M_{AB} \cdot \vec{v}$ → Vektor mit Mengen in C_1 und C_2