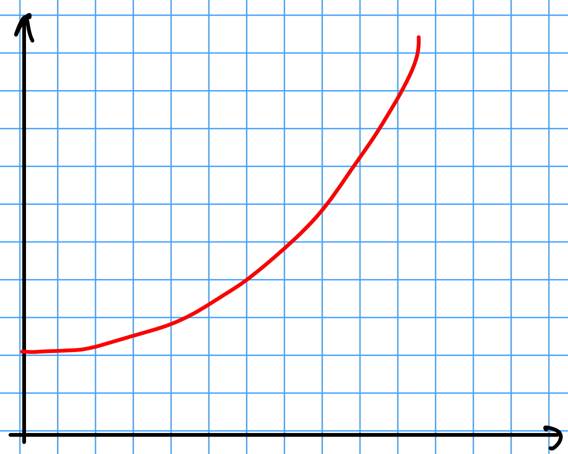
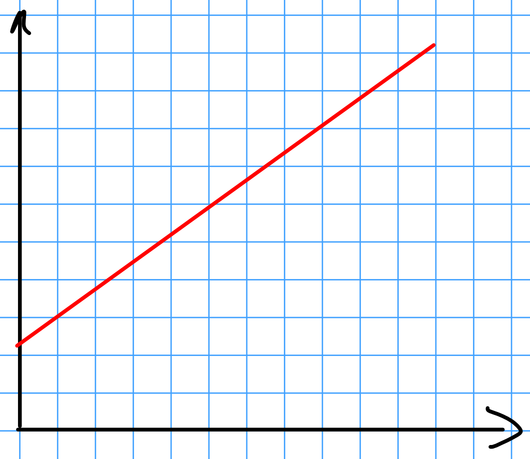
Exponentielles Wachstum

23. September 2016



exponentiell



linear

Δt	0	1	2	3
y	10	100	1000	10'000

$\cdot 10$ $\cdot 10$ $\cdot 10$

oder $\cdot 2$

Δt	0	1	2	3
y	10	20	30	40

+10 +10 +10

oder +2

"Dreisatz"

$$\cdot \begin{array}{lcl} 100\% & \xleftarrow{:} & 25 \\ 23\% & & x \end{array}$$

Allgemein wird exponentielles Wachstum durch

$$f(t) = a \cdot b^t$$

a: Funktionswert $f(0)$, als der Anfangswert bei $t=0$

b: Wachstumsfaktor für $\Delta t = 1$ (Abhängig von der Masseinheit!)

$b > 0$

$b < 1$ => exponentiellen Zerfall

$b = 1$ => alles bleibt konstant

$b > 1$ => exponentielles Wachstum

Halbwertszeit: Beim Zerfall, die Zeitspanne, welche es dauert, bis sich der Bestand halbiert hat.

Verdoppelungszeit: (Beim Wachstum) Die Zeitspanne, welche es dauert, bis sich der Bestand verdoppelt.

Aufgabe 18

a) f:

t	0	1	2	3	4	5
$f(t)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{243}{32}$	$\frac{2187}{128}$

b)

$\Delta t = 1 \Rightarrow b = \frac{9}{4}$

$\Delta t = 2 \Rightarrow b = \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{81}{16}$

Δt allgemein $\Rightarrow \left(\frac{9}{4}\right)^{\Delta t}$

$\Delta t = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

S. 67 16, 18, 20, 22, 26

S. 69 30, 32, 34

S. 76 57 – 59

---

26. September 2016

+ Prüfung retour
+ Aufgabe 22, Seite 68

Aufgabe 22

$b = 0.125$ (Wachstumsfaktor $b < 1 \Rightarrow$ Zerfall)
(für $\Delta t = 5$)

a) $\sqrt[5]{\frac{1}{8}} \Rightarrow$ Wachstumsfaktor für $\Delta t = 1$

$$a \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{5}t} = \frac{1}{2}a \quad \Big| :a$$

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{t}{5}} = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1^3}{2^3}\right)^{\frac{t}{5}} = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3t}{5}} = \left(\frac{1}{2}\right)^1$$

$$\frac{3t}{5} = 1 \Rightarrow t = \frac{5}{3}$$

$$\log_{\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{5}}}\left(\frac{1}{2}\right) = t$$

$$\frac{t}{5}\log\left(\frac{1}{8}\right) = \log\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{t}{5} = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log\left(\frac{1}{8}\right)}$$

b) $\left(\sqrt[5]{64}\right)^{t} = 2$

$$64^{\frac{t}{5}} = 2 \quad \longrightarrow \quad 2^{\frac{6t}{5}} = 2^{1}$$

$$\underline{\underline{t = \frac{5}{6}}}$$

Aufgabe 26

$$5.12 \cdot 10^{20} \cdot b^{5} = 1.55 \cdot 10^{16} \qquad | : 10^{16}$$

$$5.12 \cdot 10^{4} \cdot b^{5} = 1.55 \qquad | : 5.12 \cdot 10^{4}$$

$$b^{5} = \frac{1.55}{5.12 \cdot 10^{4}} \qquad | \sqrt[5]{}$$

$$b = \sqrt[5]{\frac{1.55}{5.12} \cdot 10^{-4}}$$

a) $5.12 \cdot 10^{20} \cdot \sqrt[5]{\frac{1.55}{5.12} \cdot 10^{-4}}$

b) $5.12 \cdot 10^{20} \cdot \left(\frac{1.55}{5.12} \cdot 10^{-4}\right)^{\frac{2}{5}}$

...

S. 67 26

S. 69 30, 32, 34

S. 76 57 – 59

Aufgabe 30 (Prozentuales Wachstum)

Wachstum um 5%

Δt	0	1	2

$\cdot \frac{105}{100} \mathrel{\hat=} 105\%$

$\boxed{\text{Allgemein: Wachstum um } p\% \text{ heisst } \quad b = \frac{100 + p}{100} = 1 + p\%}$

30. September 2016

- \+ Abgabe: 1. Teil Auftrag
- \+ Abschluss des Themas (-> Lernziele)

$1 - \frac{p}{100}$

Aufgabe 30

Wachstumsfaktor bei einer Abnahme um p %

$$b = 1 - \underset{\uparrow \frac{1}{100}}{p\%} = 1 - \frac{p}{100} = \frac{100-p}{100}$$

Beispiele:

10 % Wachstum $\rightarrow$ $b = 1.1$

20% Abnahme $\rightarrow$ $b = 0.8$ $\left(= 1 - \frac{20}{100}\right.$

$16\frac{2}{3}$ % Abnahme $\rightarrow$ $b = 0.83\overline{3}$

$\hookrightarrow 100\% - 16\frac{2}{3}\% = 83\frac{1}{3} = 83.\overline{3}$

Δt	0	1
	100	110

1.1

$\rightarrow$ 31 (so viel wie nötig)
32 $\Big\}$ S.69

S. 76: Aufgaben 57, 58

Aufgabe 32

S.65: 11–12
S.76: 61

a) $a \cdot b^{20} = 2a \quad | :a$

$b^{20} = 2 \quad | ()^{\frac{1}{20}}$

$b = 2^{\frac{1}{20}} = \sqrt[20]{2} = 1.035$

Wachstum um $\underline{\underline{3.5\%}}$

58	a) 89	b) 11.74 Jahre	c) 2023	d) 5.73 %
57	a) 479 Millionen	b) 2005	c) 23.45 Jahre	

Aufgabe 57

a) $x \cdot 1.03^5 = 555$

$x = \frac{555}{1.03^5} = 478.75$ Mio.

c) $a \cdot 1.03^t = 2 \cdot a \quad | :a$

$1.03^t = 2 \quad | \log()$

$t \cdot \log(1.03) = \log(2) \quad | :\log(1)$

$t = \frac{\log(2)}{\log(1.03)} = 23.45$ Jahre

b) $1'000 = 555 \cdot 1.03^t \quad | :555$

$\frac{1'000}{555} = 1.03^t \quad | \log()$

$\log(1000) - \log(555) = t \cdot \log(1.03)$

$\frac{\log(1000) - \log(555)}{\log(1.03)} = t = 19.91$ Jahre

$\Rightarrow 1985 + 20$ J. $= \underline{\underline{2005}}$

Aufgabe 11 (S.65) Zahl e

1 Fr. Startkapital 100% Zins

$1 + \frac{100}{100} \cdot 1 = 2$

$b = 2 = \left(1 + \frac{100}{100}\right)$

100% Jahreszins: Halbjährlich 50%

t	0	$\frac{1}{2}$ Jahr	1. Jahr
	1		

50% 50%

$$K = 1\,\text{Fr.} \cdot 1.5^2 = 2.25\,\text{Fr.}$$

$$b = 1.5 \; (= 1 + 0.6)$$

- Wir bekommen monatlich Zins: $\frac{100\%}{12}$

$$b = \frac{1}{12} + 1 = \frac{13}{12}$$

$$K = 1\,\text{Fr.} \cdot \left(\frac{13}{12}\right)^{12} = 2.60$$

- Wir erhalten jede Sekunde Zins:

$b =$

Anzahl Sekunden

$360 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 31'104'000$

$$K = 1\,\text{Fr}\left(1 + \frac{1}{31'104'000}\right)^{31'104'000} = 2.71 \approx e$$

$$\boxed{e := \lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}}$$

lim: Limes/Grenzwert

∞: Unendlich