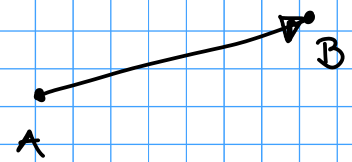
Grundlagen der Vektorgeometrie

24. Oktober 2016

+ 1. Aufgabe retour
+ 2. und 3. Aufgabe inkl. Abgabetermin
+ Verschieben von Lektionen

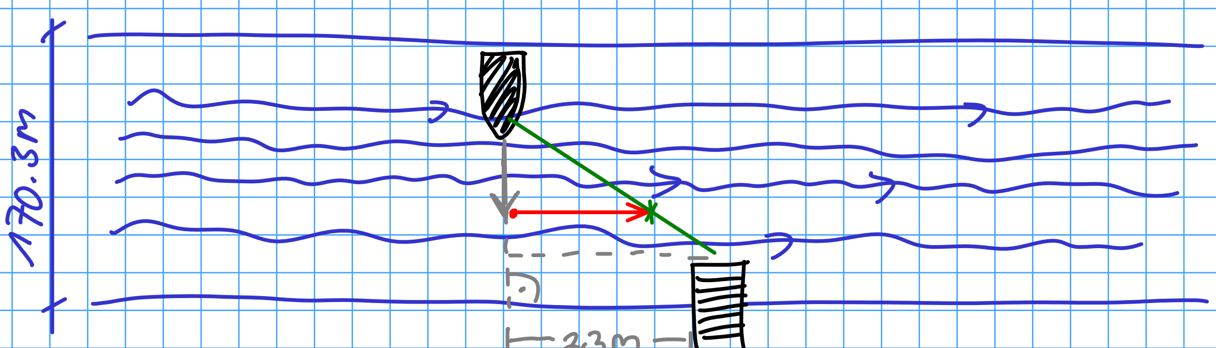
Was ist von Vektorgeometrie schon bekannt?

- Sind Pfeile (Strecke mit Ausgangs- und Endpunkt)



- Hat immer eine Richtung und eine bestimmte Länge
- Physik: ~~Gewicht~~ Kraft

Ein erstes Beispiel



Flussgeschw.: $5 \frac{km}{h}$

$= 5 \cdot \frac{1000m}{3600s}$

Mit welcher Geschwindigkeit müsst ihr rudern

um an den Bootssteg zu gelangen?
(Vereinfachung: Steg und Boot sind punktförmig.)

$$V_{Boot} = 10.28\,\frac{m}{s} = 37.008\,\frac{km}{h}$$

$$5\,\frac{km}{h} \xrightarrow{:3.6} 1.39\,\frac{m}{s}$$

$$\frac{23m}{1.39\,\frac{m}{s}} = 16.56\,s \qquad \frac{170.3m}{16.56s} = 10.28\,\frac{m}{s}$$

Anderer Ansatz:

$$\frac{V_{Boot}}{V_{Fluss}} = \frac{170.5m}{23m}$$ (Ähnliche Dreiecke)

Vektoren

Definition: Ein Vektor ist eine Grösse mit einer Richtung und einem Betrag, aber keinen bestimmten Ort)

Punkt: Ort ohne Länge / Richtung / Ausdehnung

---

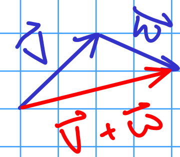
28. Oktober 2016

+ Fortsetzung: Grundoperationen mit Vektoren
+ Rechengesetzte von Vektoren

Grundoperationen:

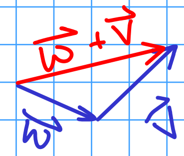
Addition von Vektoren $\vec{v} + \vec{w}$

: $\vec{v} + \vec{w}$



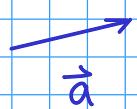
$=$

$\vec{w} + \vec{v}$

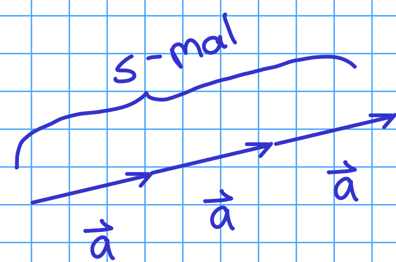


$\Rightarrow$ Kommutativgesetz

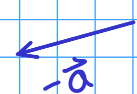
Skalarmultiplikation: Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl



: $s \cdot \vec{a}$

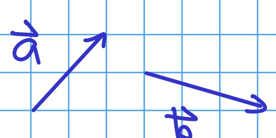


Falls $s < 0$: $-1 \cdot \vec{a}$

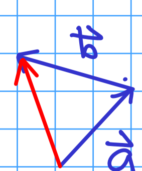


(Gegenvektor)

Subtraktion von Vektoren



: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$



Es gibt einen speziellen Vektor: $\vec{0}$ Nullvektor

Eine Grösse ohne Richtung, ohne Ort mit Betrag 0.

$$\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$$

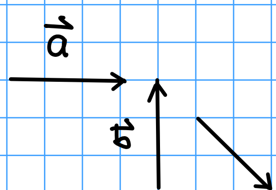
Kann man Vektoren dividieren?

$\vec{a} : 2 = \frac{1}{2}\vec{a}$ (Wird normalerweise nicht definiert)

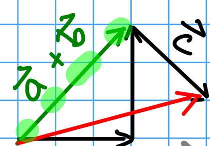
! Zwei Vektoren können nicht durch einander dividiert werden. Auch die Multiplikation zweier Vektoren ist nicht wie bei Zahlen definiert.

Grünes Heft mitnehmen!

Assoziativgesetz:

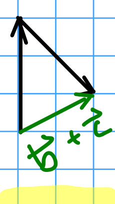


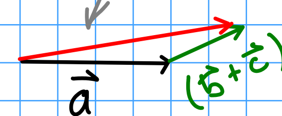
$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$:



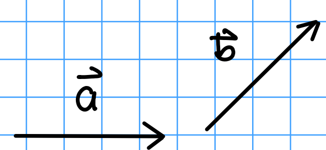
Dieselben Vektoren.

$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$:

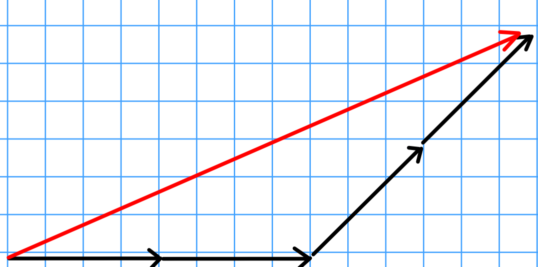




Distributivgesetz:

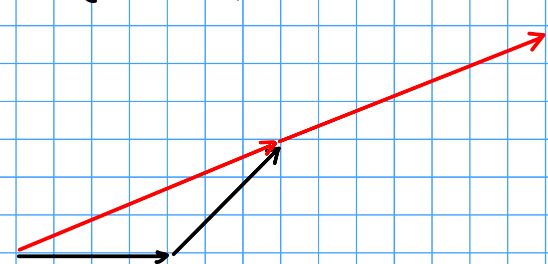


$2\vec{a} + 2\vec{b}$:



=

$2(\vec{a} + \vec{b})$:



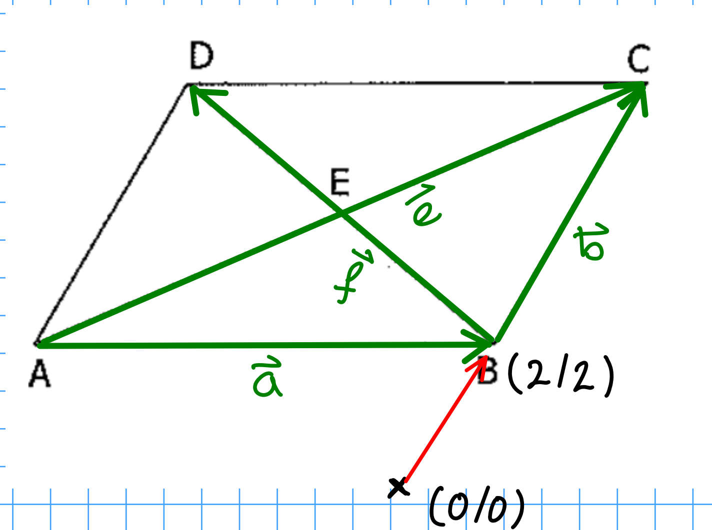
Aufgaben 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9

$\boxed{\text{HA: Bis Aufgabe 7}}$

7. November 2016

8.11, 13.15, Zimmer 335
9.11, 11.25, Zimmer 222 (gesamte Klasse)
~~(14.11, 07.40, Zimmer 346)~~

Aufgabe 7 (Seite 20)



$\overrightarrow{AB}$: a) $\vec a$
b) $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec e - \frac{1}{2}\vec f$

$\overrightarrow{AC}$: a) $\overrightarrow{AC} = \vec a + \vec b$
b) $\vec e$

$\overrightarrow{AD}$: a) $\overrightarrow{AD} = \vec b$
b) $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\vec e + \frac{1}{2}\vec f$

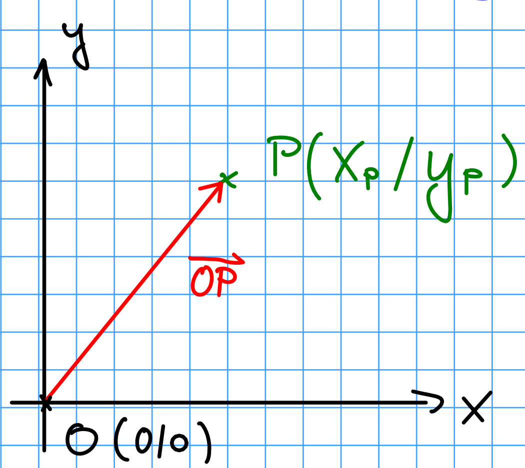
$\overrightarrow{BE}$: a) $-\frac{1}{2}\vec a + \frac{1}{2}\vec b = \frac{1}{2}\vec b - \frac{1}{2}\vec a$
b) $\frac{1}{2}\vec f$

$\overrightarrow{BC}$: a) $\vec b$
b) $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\vec e + \frac{1}{2}\vec f$

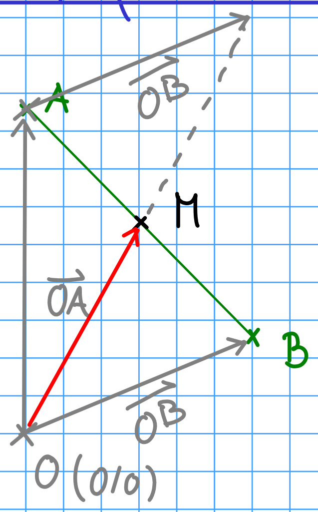
$\overrightarrow{EC}$: a) $\overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}\vec a + \frac{1}{2}\vec b$
b) $\overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}\vec e$

Ortsvektoren von Punkten

Der Vektor vom Ursprung O zu einem Punkt P heisst Ortsvektor von P.



Mittelpunkt zwischen zwei Punkten



$\Rightarrow$ $\vec{OM}$: Ortsvektor von Punkt M

Gegeben sind $\vec{OA}$ und $\vec{OB}$

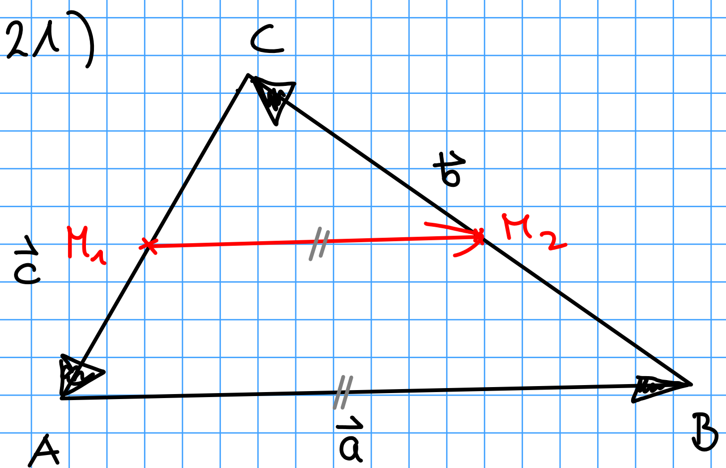
$$\vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$$

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \vec{OA} + \frac{1}{2}(\vec{OB} - \vec{OA})$$

$$= \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB} - \frac{1}{2}\vec{OA} = \frac{1}{2}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB}$$

Weitere Aufgaben: $\underbrace{9, 10,}_{HA}$ 12, 15 (Seite 21)

Aufgabe 12 (Seite 21)



① $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{M_1M_2}$

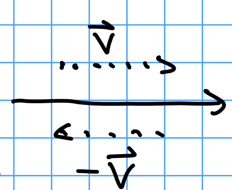
② Parallelität

$$\vec{M_1M_2} = -\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\vec{a} = -\vec{b} - \vec{c}$$

$$\vec{M_1M_2} = \frac{1}{2}(-\vec{b} - \vec{c}) = \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{AB}$$

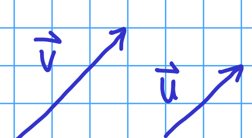
$\Rightarrow$ $\vec{M_1M_2}$ und $\vec{AB}$ sind kollinear.



Kollinearität von Vektoren

Zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ heissen kollinear (parallel) falls es eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ ($s \neq 0$) gibt, so dass

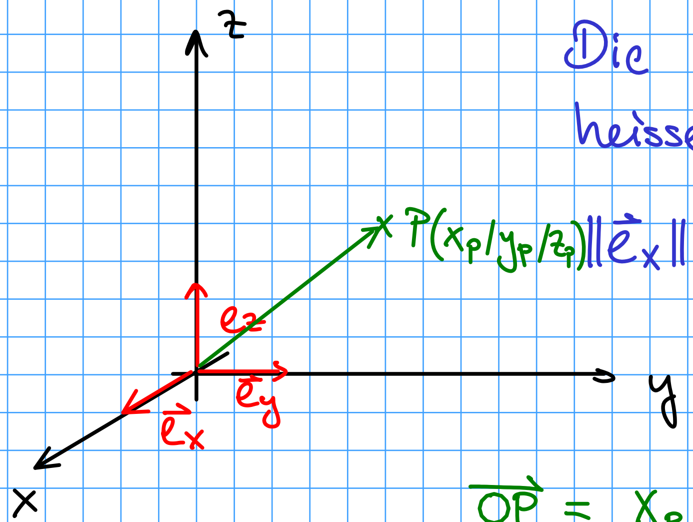
$$\vec{u} = s \cdot \vec{v}$$



$s > 0$: Orientierung der Vektoren ist gleich.
$s < 0$: Orientierung der Vektoren ist invers.

S. 21, A. 15 als Übung (z.B. Prüfungsvorbereitung)

Vektoren im Koordinatensystem



Die Vektoren $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$ heissen Standardbasis, es gilt

$$\|\vec{e}_x\| = \|\vec{e}_y\| = \|\vec{e}_z\| = 1$$

$$\overrightarrow{OP} = x_p \cdot \vec{e}_x + y_p \cdot \vec{e}_y + z_p \cdot \vec{e}_z$$

Komponenten eines Vektors

Wir schreiben

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix}$$

oder allgemein

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Beispiel : $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Addition von Vektoren:

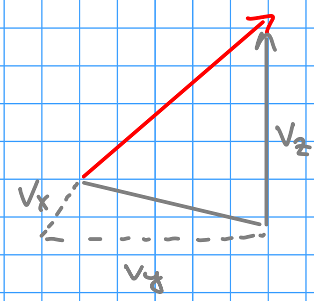
$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x + w_x \\ v_y + w_y \\ v_z + w_z \end{pmatrix}$$

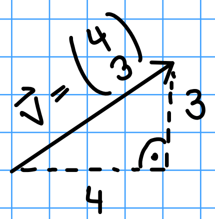
Skalarmultiplikation:

$$s \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s v_x \\ s \cdot v_y \\ s \cdot v_z \end{pmatrix}$$

Länge eines Vektors:

$$\left\| \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$





$$\|\vec{v}\| = \sqrt{16 + 9} = 5$$

HA

Aufgaben $\boxed{1, 2,}$ 3, 5

---

7. November 2016

Kurze Lernkontrolle: Im folgenden wurden der Punkt P(7/5/3) auf Q gespiegelt. An was könnte gespiegelt worden sein? Gib alle Möglichkeiten an.

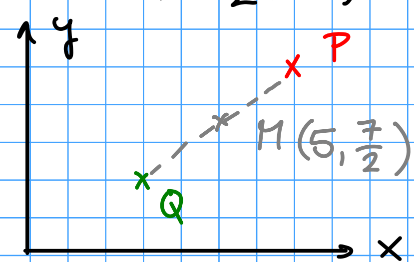
Q(7/-5/-3) x-~~Ebene~~ Achse ; Am Punkt (7/0/0)

Q(-7/5/3) yz-Ebene ; Am Punkt (0/5/3)

Q(3/2/1) ~~xz-Ebene~~ ; Am Punkt $(5, \frac{7}{2}, 2)$

Q(-5/5/3) Am Punkt (1/5/3)

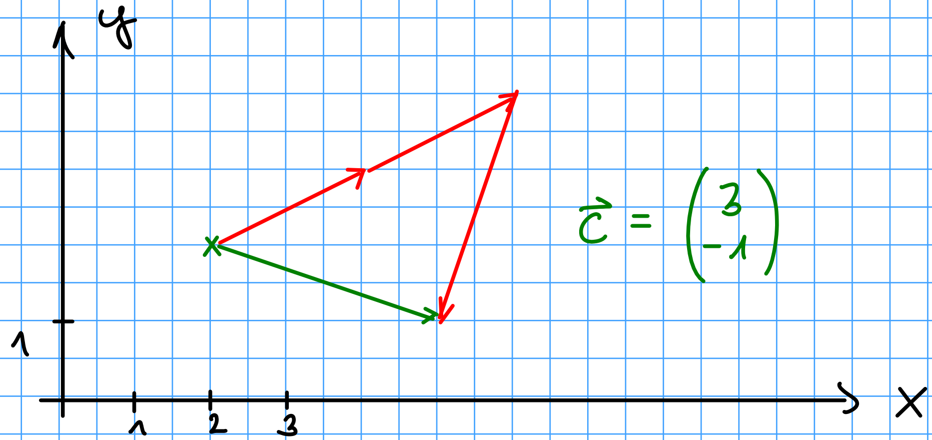
An einer zur yz-Ebene parallelen Ebene bei x = 1



Beispiel einer Vektorrechnung mit Zahlen:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$$

1. <u>Geometrisch</u>



$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. <u>Rechnerisch</u>

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Theorie zu Kollinearität

→ Aufgabe 3, 5, 6 (S. 22)

Kollinearität von Vektoren

Kollinear: Es gibt ein $s \neq 0$ s.d.

$$\vec{v} = s \cdot \vec{u}$$

Mit Komponenten

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} v_x = s \cdot u_x \Rightarrow s = \dfrac{v_x}{u_x} \\ v_y = s \cdot u_y \Rightarrow s = \dfrac{v_y}{u_y} \end{matrix} \quad \overset{?}{=}$$

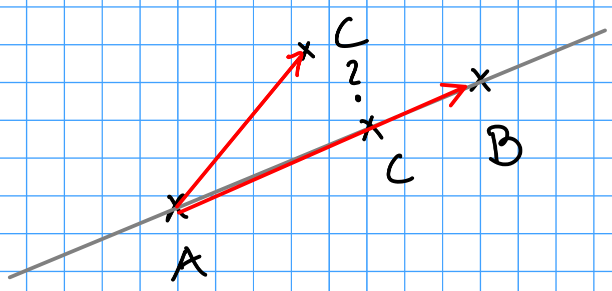
Beispiel: Aufgabe 6

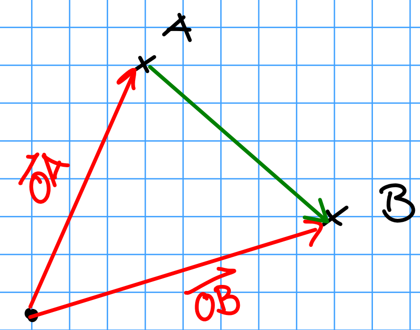
a) $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$s = \frac{4}{-12} = -\frac{1}{3}$ $\qquad$ $s = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ ✗

$s = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$ $\qquad$ nicht kollinear.

Aufgabe 10





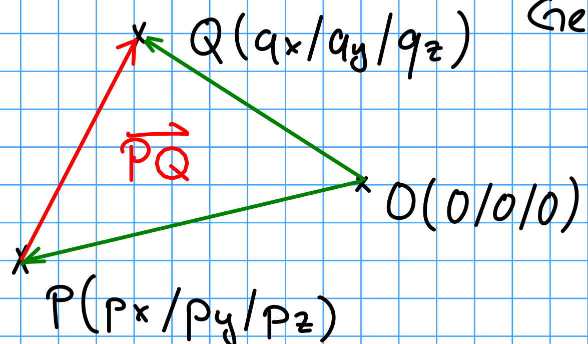
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$\underbrace{3, 5, 6, 7a), 9, 10,}$

Der durch zwei Punkte definierte Vektor

Gegeben: $\overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{OQ}$



Ich muss einen Weg von P zu Q finden

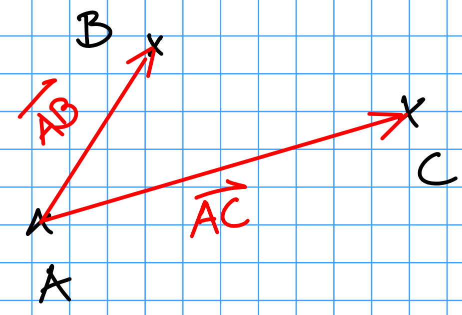
$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$

$$\boxed{\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}}$$

+ Lernziele Prüfung: Vektorgeometrie, Block 1
  (Letzte Prüfung mit TI-30)
+ Zusammen: Aufgaben 12 c) (11, 13 als Prüfungsv.)
+ Weitere Aufgaben:
  S. 24: 18, 21, (23), 22, 25, (26), 28 b), (32),

Aufgabe 10 S. 23



Ist $\vec{AC}$ kollinear zu $\vec{AB}$?

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} 10+2 \\ -1-5 \\ 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} -8+2 \\ 8-5 \\ -6+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Gibt es ein s, so dass

$$s\begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \longrightarrow 12s = -6 \quad | :12$$

$$s = -\frac{1}{2}$$

$-\frac{1}{2} \cdot (-6) \overset{?}{=} 3$ ✓

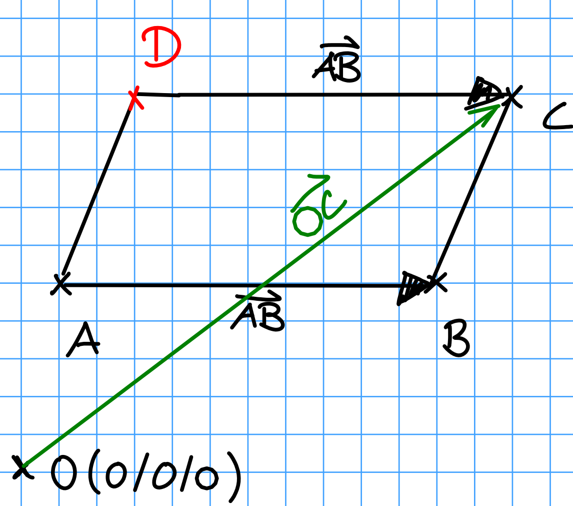
$-\frac{1}{2} \cdot 4 = -2$ ✓

=> Vektoren sind kollinear

=> A, B, C liegen auf einer Geraden

Aufgabe 12

c) Ges: $D(x_D / y_D / z_D)$



$\vec{OD}$: Ortsvektor von Punkt D

$$\vec{OD} = \vec{OC} - \vec{AB}$$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-5+2 \\ 8-3-1 \\ -6+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

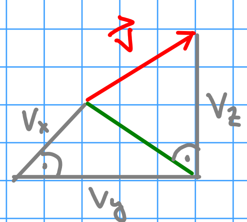
$$\underline{\underline{D(-4/4/1)}}$$

Erinnerung: Länge eines Vektors = Pythagoras

$$\|\vec{v}\| = \left\| \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Beispiel: $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$

Begründung:

3D: 

$\text{///} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{\text{///}^2 + v_z^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

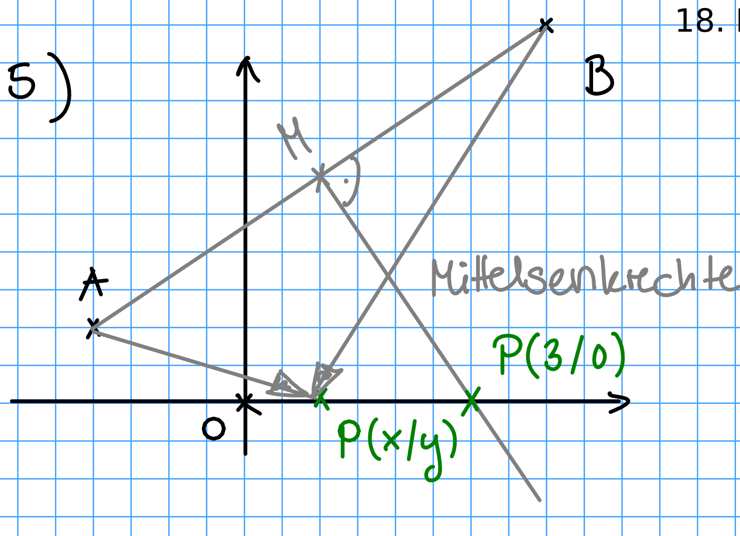
$$\boxed{\text{HA: } 18, 21}$$

---

18. November 2016

Aufgabe 26 (S. 25)

Rechnerische Lösung:



$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$

$\|\overrightarrow{AP}\| = \|\overrightarrow{BP}\|$

$\|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}\| = \|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}\|$

$$\left\| \begin{pmatrix} x\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}\right\| \Rightarrow \left\|\begin{pmatrix}x+2\\-1\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}x-4\\-5\end{pmatrix}\right\|$$

$$\sqrt{(x+2)^2+(-1)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(-5)^2} \qquad \Big|\ (\,)^2$$

$$x^2+4x+4+1 = x^2-8x+16+25 \qquad \Big|\ -x^2+8x-5$$

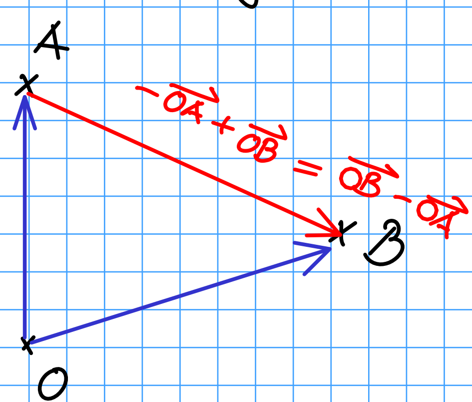
$$12x = 36 \qquad \Big|\ :4$$

$$x = 3 \qquad \underline{\underline{P(3/0)}}$$

Erinnerung: Vektor von A zu B.

27 a) b)

28 a) b)



28a) Welcher Punkt auf der x-Achse ist von A(0/-2/4) doppelt so weit entfernt wie von B(6/2/-1) ?

$$P(x/0/0)$$

$$\|\overrightarrow{AP}\| = 2\cdot\|BP\|$$

$$\left\|\begin{pmatrix}x-0\\0+2\\0-4\end{pmatrix}\right\| = 2\cdot\left\|\begin{pmatrix}x-6\\0-2\\0+1\end{pmatrix}\right\|$$

$$\sqrt{x^2+2^2+(-4)^2} = 2\cdot\sqrt{(x-6)^2+(-2)^2+1^2} \qquad \Big|\ (\,)^2$$

$$x^2+4+16 = 4\left(x^2-12x+36+4+1\right)$$

$0 = 3x^2 - 48x + 164 - 20 \quad | :3$

$0 = x^2 - 16x + 48$

$0 = (x-12)(x-4)$

$x_1 = 12 \quad x_2 = 4 \longrightarrow P_1(12/0/0)$

$P_2(4/0/0)$

Repetition von allem

28 b) 32 33 ← eine letzte Prüfungsaufgabe