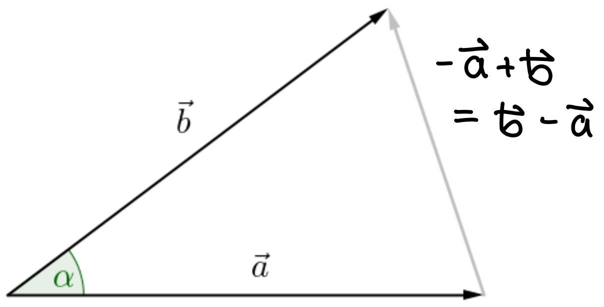
# Vektorgeometrie Block 2: Skalarprodukt

25. November 2016




<u>Ziel</u>: Der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ soll berechnet werden.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left[ \frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c} \right]$$

$$\rightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$

Allgemein: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$

$$\cos(\alpha) = \frac{c^2 - b^2 - a^2}{-2ab} = \frac{\|\vec{b}-\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2}{-2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{(b_x-a_x)^2 + (b_y-a_y)^2 + (b_z-a_z)^2 - b_x^2 - b_y^2 - b_z^2 - a_x^2 - a_y^2 - a_z^2}{-2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}$$

$$(b_x - a_x)^2 = b_x^2 + a_x^2 - 2b_x a_x$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\cancel{-}2b_x a_x \cancel{-}2b_y a_y \cancel{-}2b_z a_z}{\cancel{-2}\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}$$

S. 28:
A. 12, 13
15

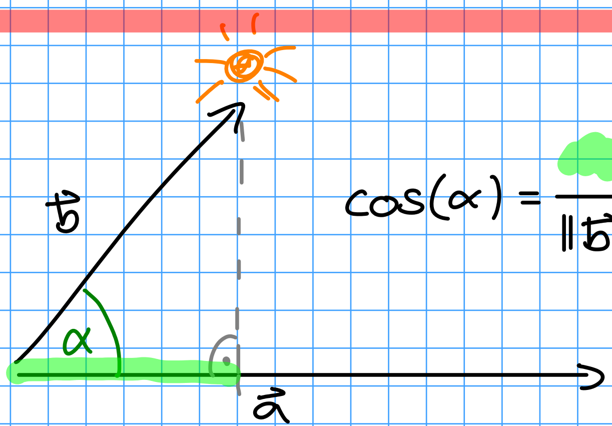
arcus cosinus

$$\boxed{\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}\right)}$$

# Das Skalarprodukt

S. 27, A. 1., 3, 4 5

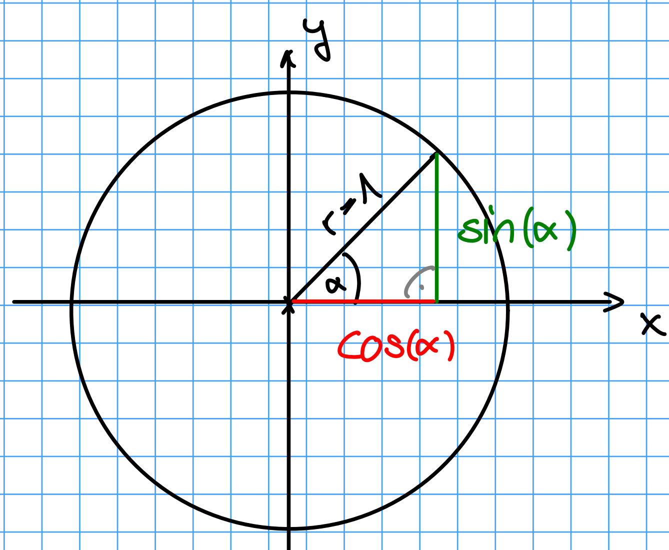
$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &:= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\\ \vec{a}\cdot\vec{b} &= \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cdot\cos(\alpha)\end{aligned}}$$




$$\cos(\alpha) = \frac{\quad}{\|\vec{b}\|} \Rightarrow \quad = \|b\|\cdot\cos(\alpha)$$

Geometrische Bedeutung: Länge von $\vec{a}$ multipliziert mit der senkrechten Projektion (Schatten) von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$.

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}$




Aufgabe : 1, S. 27

---

2. Dezember 2016

\+ Eigenschaften des Skalarproduktes

**Lernziele**

2. 1. Du kennst die Definition des Skalarprodukts und kannst diese geometrisch veranschaulichen.

2. Du berechnest das Skalarprodukt aus den Längen der Vektoren und ihrem Zwischenwinkel und begründest diese Berechnungsformel mit Hilfe der Definition des Skalarprodukts.

3. Du wendest die Rechenregeln des Skalarprodukts an.

3. 4. Du leitest eine Formel zur Berechnung des Skalarprodukts aus den Komponenten der Vektoren her und wendest diese an.

1. 5. Du benutzt das Skalarprodukt um den Winkel zwischen Vektoren zu berechnen und insbesondere um zu prüfen, ob Vektoren senkrecht zueinander stehen.

Aufgabe 2 a) c)

$\|\vec{a}\| = a$ (Vektorpfeil weglassen)

Notation für die Länge eines Vektors

Aufgabe 3
Aufgabe 4
Aufgabe 5

} Eigenschaften des Skalarprodukts.

**Aufgabe 2**

z.B aus $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\alpha)$

b)

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} = \frac{-3}{7 \cdot 6} = -\frac{1}{14}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{14}\right) \overset{TR}{=}$$

**Eigenschaften des Skalarprodukts**

Kommutativgesetz: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = b_x a_x + b_y a_y + b_z a_z = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

(Linearität) : $k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$

① ③ ② ③

**Produkte:**

② – Skalarmultiplikation "Zahl" · "Vektor"

③ – Skalarprodukt "Vektor" · "Vektor"

① – Produkt von reellen Zahlen "Zahl" · "Zahl"

$$k \cdot (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)$$

$$= (ka_x) \cdot b_x + (ka_y) b_y + (ka_z) b_z$$

$$=$$

$$(k \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} ka_x \\ ka_y \\ ka_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = ka_x b_x + ka_y b_y + ka_z b_z$$

Distributivgesetz: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x + c_x \\ b_y + c_y \\ b_z + c_z \end{pmatrix} = a_x(b_x + c_x) + a_y(b_y + c_y) + a_z(b_z + c_z)$$

Distributivgesetz in $\mathbb{R}$

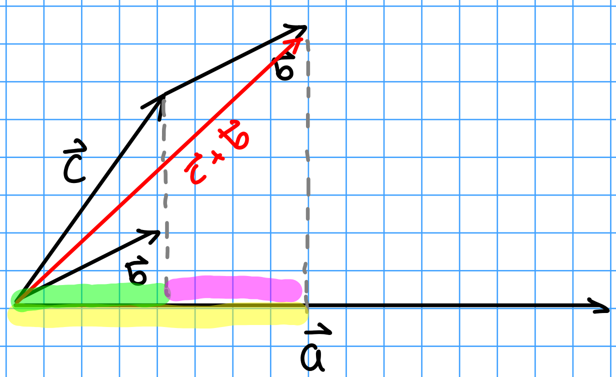
$$= a_x b_x + a_x c_x + a_y b_y + a_y c_y + a_z b_z + a_z c_z$$

Kommutativität von "+" in $\mathbb{R}$

$$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z + a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z$$

Definition des Skalarprod.

$$= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$




$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \|\vec{a}\|$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = \|\vec{a}\| \cdot \; + \|\vec{a}\| \cdot$$

$$= \|\vec{a}\| ( \; + \; ) = \|\vec{a}\|$$

$\to$ 4, 5, 7 ...

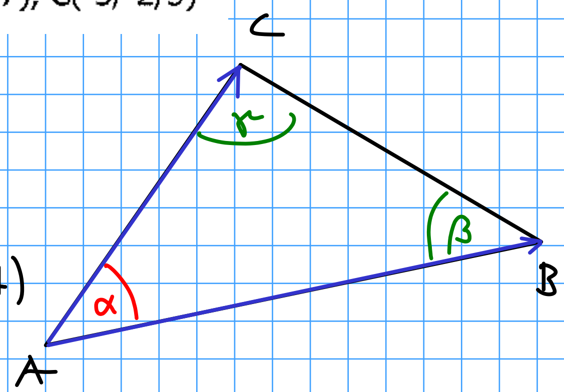
$\boxed{\text{HA: } 4, 5, 7\,a)}$

Wichtig: Vor allem die geometrische Interpretation



## + Winkel-Aufgabe mit dem Rechner

13. Berechne die Winkel des Dreiecks ABC.
    a) A(-4/2/6), B(-3/6/0), C(0/-2/-1) b) A(4/-1/2), B(1/0/7), C(-3/-2/5)




$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} \overset{TR}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Menu}} \to \boxed{7} \to \boxed{C} \to \boxed{3} \to$ dotP( ) (Skalarprodukt)

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} \overset{dotP}{=} 30$$

$\boxed{\text{Menu}} \to \boxed{7} \to \boxed{7} \to \boxed{1} \to$ norm() (Länge eines Vektors)

| | |
|---|---|
| $a:=[-4\ \ 2\ \ 6]$ | $[-4\ \ 2\ \ 6]$ |
| $b:=[-3\ \ 6\ \ 0]$ | $[-3\ \ 6\ \ 0]$ |
| $c:=[0\ \ -2\ \ -1]$ | $[0\ \ -2\ \ -1]$ |
| $ab:=b-a$ | $[1\ \ 4\ \ -6]$ |
| $ac:=c-a$ | $[4\ \ -4\ \ -7]$ |
| $\text{dotP}(ab,ac)$ | 30 |

| | |
|---|---|
| $\dfrac{\text{dotP}(ab,ac)}{\text{norm}(ab)\cdot\text{norm}(ac)}$ | $\dfrac{10\cdot\sqrt{53}}{159}$ |
| $\dfrac{\cos^{-1}\left(\frac{10\cdot\sqrt{53}}{159}\right)}{1°}$ | 62.7503 |

7. Berechne den Zwischenwinkel von $\vec{a}$ und $\vec{b}$, wenn gilt:
   a) $a = ½\, b$, $\vec{a}\cdot(\vec{a} - \vec{b}\,) = 0$, $(a \neq 0)$;
   b) $a = 6$, $b = 5$, $\vec{a}\cdot(\vec{a} - 2\vec{b}\,) = 6$;
   c) $a = 2$, $b = 7$, $\vec{a}\cdot(3\vec{a} - \vec{b}\,) = 5$;

Aufgabe 7, 9

a) $\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

$\Rightarrow \quad \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos(\alpha) = 0$ Wir wissen $\|\vec{a}\| = \frac{1}{2}\|\vec{b}\|$

$\|\vec{a}\|^2 - 2\|\vec{a}\|^2 \cos(\alpha) = 0$ *zulässig weil $\|\vec{a}\| \neq 0$

$$\|\vec{a}\|^2 = 2\|\vec{a}\|^2 \cos(\alpha) \quad | : \|\vec{a}\|^2 \, *$$

$$1 = 2\cos(\alpha) \quad | : 2$$

$$\frac{1}{2} = \cos(\alpha) \quad | \cos^{-1}(\cdot)$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{60°}}$$

HA: Aufgabe 13 mit TR fertig lösen
Aufgabe 7 a) - c)