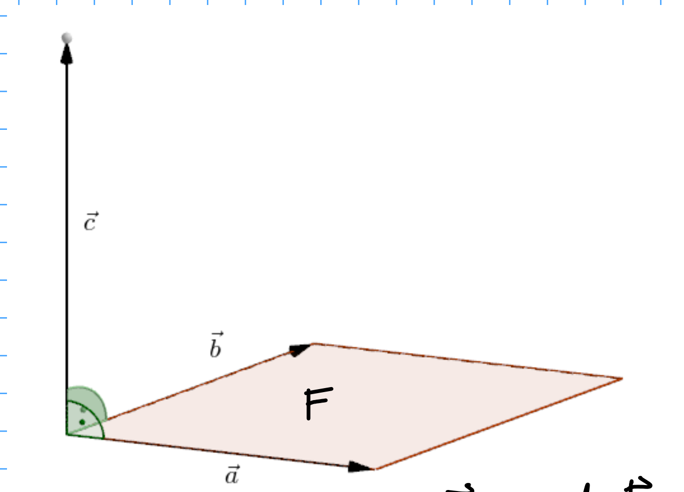
Das Vektorprodukt

Ziel: Ein Produkt von Vektoren zu definieren, dessen Ergebnis ein Vektor

zum von Skalarprodukt unterscheiden

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$



1. $\vec{c}$ steht senkrecht zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
2. Der Vektor $\vec{c}$ hat dieselbe Länge wie die von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Parallelogramsfläche. (Betragsmässig ohne Einheit)
3. Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{matrix}$$

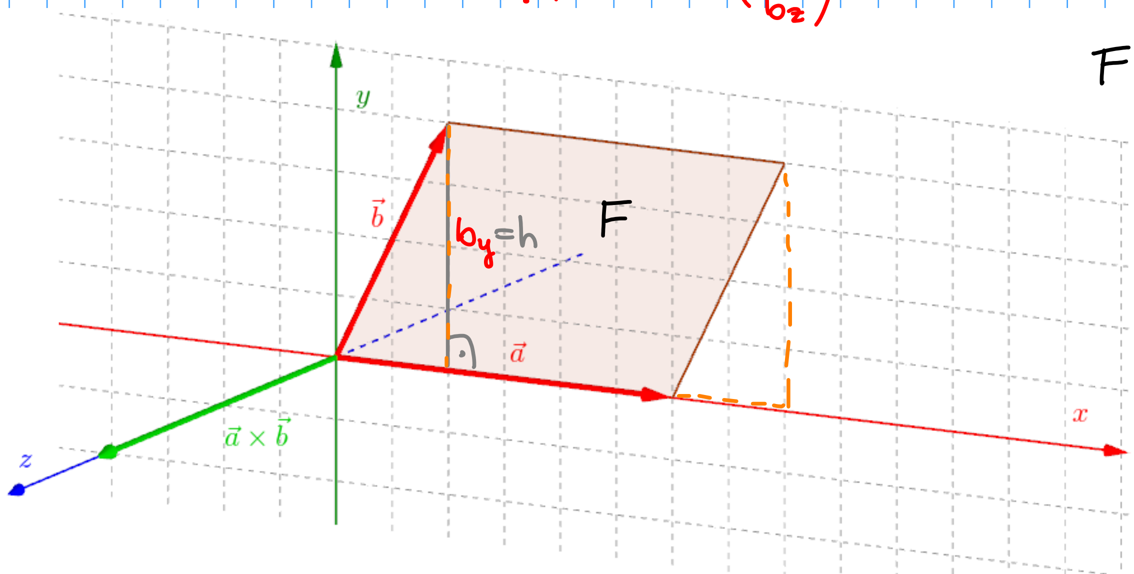
$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 - (-3)(-1) \\ -3 \cdot 2 - 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -16 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Beweis:

1.) $$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \overset{?}{=} a_x(a_y b_z - a_z b_y) + a_y(a_z b_x - a_x b_z) + a_z(a_x b_y - a_y b_x) \overset{\dots}{=} 0$$

2./3. $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$

12. Dezember 2016



$$F = \|\vec{a}\| \cdot h = \|\vec{a}\| \cdot b_y$$

$$\sqrt{a_x^2 + 0^2 + 0^2} = a_x \cdot b_y$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot b_y \\ 0 \cdot b_x - a_x 0 \\ a_x b_y - 0 \cdot b_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_x b_y \end{pmatrix}$$

$a_x \quad b_x$
$0 \quad b_y$

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_x b_y \end{pmatrix} \right\| = a_x b_y = F$$

Es gilt $a_x \geq 0$ $b_y \geq 0$
$\Rightarrow a_x \cdot b_y \geq 0 \Rightarrow \vec{c}$ zeigt in Richtung der positiven z-Achse
$\Rightarrow$ Rechtssystem.

HA auf Freitag

Aufgaben (S. 51)

2. berechne $\vec{a} \times \vec{b}$
3. a) – c)
4. a), b)
5. mit Hilfe der Gesetze aus 3 und 4
(6. Erkläre die Formel geometrisch.)
(7.)
8 a)

9. berechne $\vec{AB} \times \vec{AC}$
↳ mit und ohne TR

11. 3 Arten: – Kollinearität
– Skalarprodukt
– Vektorprodukt

12. Mit Angabe einer Formel zur Berechnung

15.

16.

Aufgabe 3 c)

bilinearität des Vektorproduktes:

$$(u\vec{a}) \times (v\vec{b}) = uv(\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\left(u\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}\right) \times \left(v\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}\right) \overset{①}{=} \begin{pmatrix} ua_x \\ ua_y \\ ua_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} vb_x \\ vb_y \\ vb_z \end{pmatrix} \overset{②}{=} \begin{pmatrix} ua_y \cdot vb_z - ua_z \cdot vb_y \\ ua_z \cdot vb_x - ua_x \cdot vb_z \\ ua_x \cdot vb_y - ua_y \cdot vb_x \end{pmatrix}$$

ua_x $\quad$ vb_x

ua_y $\quad$ vb_y

$$\overset{③}{=} \begin{pmatrix} uv(a_y b_z - a_z b_y) \\ \text{genauso} \\ \end{pmatrix} \overset{④}{=} uv \cdot \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ \dots \\ \end{pmatrix} = uv(\vec{a} \times \vec{b})$$

① Skalarmultiplikation (Vektor mal Zahl)

② Vektorprodukt

③ Distributivgesetz (für reelle Zahlen)

④ Skalarmultiplikation

Aufgabe 5

a) $$(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{b} - \vec{a}) \overset{3b)}{=} (\vec{a} - \vec{b}) \times \vec{b} - (\vec{a} - \vec{b}) \times \vec{a}$$

$$= \vec{a} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{a} + \vec{b} \times \vec{a}$$

$$= \vec{a} \times \vec{b} - \vec{0} - \vec{0} + \vec{b} \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{a}$$

$$\overset{*}{=} \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

* Antikommutativgesetz: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

b) $$(\vec{a} - 2\vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b}) = (\vec{a} - 2\vec{b}) \times \vec{a} + (\vec{a} - 2\vec{b}) 2\vec{b}$$

$$= \vec{a} \times \vec{a} - (2\vec{b}) \times \vec{a} + \vec{a} \times (2\vec{b}) - (2\vec{b}) \times (2\vec{b})$$

$$= \vec{0} - 2(\vec{b} \times \vec{a}) + 2(\vec{a} \times \vec{b}) - \vec{0} = 4(\vec{a} \times \vec{b})$$

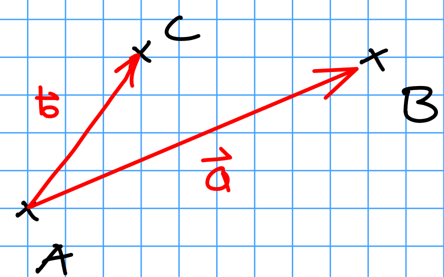
mit und ohne TR

$\rightarrow$ b) - d), 8 a), 11, 12 (inkl. Formel)

$a:=[-5\ \ 3\ \ 3]$	$[-5\ \ 3\ \ 3]$
$b:=[1\ \ 5\ \ 8]$	$[1\ \ 5\ \ 8]$
$c:=[7\ \ 11\ \ 9]$	$[7\ \ 11\ \ 9]$
$ab:=b-a$	$[6\ \ 2\ \ 5]$
$ac:=c-a$	$[12\ \ 8\ \ 6]$
crossP(ab,ac)	$[-28\ \ 24\ \ 24]$
norm$([-28\ \ 24\ \ 24])$	44

Zu Aufgabe 11: Zeigen, dass drei Punkt auf einer Geraden liegen.

1. $\vec{AB}$ kollinear zu $\vec{AC}$
   $\Leftrightarrow$ gibt es eine Zahl s mit $s\vec{AB} = \vec{AC}$



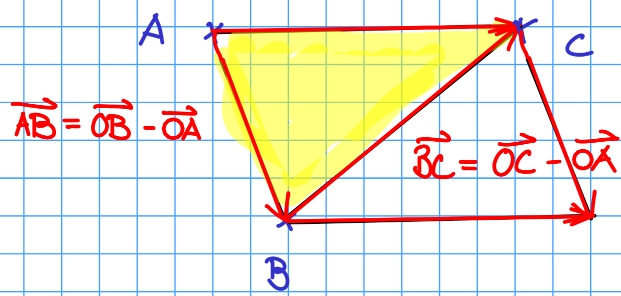
2. $\|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\| \cdot \cos(0°) = \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{AB} \cdot \vec{AC}$
   $\|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\| = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{AB} \cdot \vec{AC}|$
3. $\vec{AB} \times \vec{AC} = \vec{0}$ $\qquad \rightarrow$ 8, 11, 12

$\boxed{\text{HA: 8, 11, 12 a)}}$

19. Dezember 2016

+ Auftrag für den 16. Januar 2017
+ Fragen zu den Hausaufgaben

3D Fläche eines durch drei Punkt gegebenen Dreiecks



Bsp: $A(7/-3/1)$ $\quad C(9/-3/1)$

$B(2/0/5)$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 9-7 \\ -3-(-3) \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2-7 \\ 0-(-3) \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$F_{Parallelogramm} = \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \left\| \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{8^2 + 6^2}$$

$$= \sqrt{100} = 10$$

$$F_\Delta = \frac{F_{Parallelogramm}}{2} = \frac{10}{2} = \underline{\underline{5}}$$

$$\boxed{F_\Delta = \frac{\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|}{2} = \frac{\|\vec{BA} \times \vec{BC}\|}{2}}$$

12 b) ohne TR $\qquad$ 15. $\qquad$ 16.

c) mit TR $\qquad$ (14.) $\qquad$ 17.

Aufgabe 12 c)

$a:=[-2\ \ 11\ \ 23]$	$[-2\ \ 11\ \ 23]$
$b:=[1\ \ 7\ \ -37]$	$[1\ \ 7\ \ -37]$
$c:=[1\ \ 8\ \ -41]$	$[1\ \ 8\ \ -41]$

$ab:=b-a$	$[3\ \ -4\ \ -60]$
$ac:=c-a$	$[3\ \ -3\ \ -64]$
$\text{crossP}(ab,ac)$	$[76\ \ 12\ \ 3]$
$\text{norm}([76\ \ 12\ \ 3])$	77
$\frac{77}{2}$	38.5

Abstand Punkt - Gerade (Aufgabe 15)

$\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = F$

$h \cdot g = d \cdot \|\overrightarrow{AB}\|$ („Grundseite mal Höhe")

$d \cdot \|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| \quad \Big| : \|\overrightarrow{AB}\|$

$$\boxed{d = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}}$$