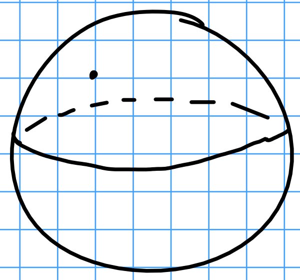
6. Januar 2017

Geraden : 1-dimensional

Ebenen : 2-dimensional

Kugeln : Alle Punkte mit demselben Abstand zu einem Mittelpunkt.
Eine 2D Fläche im 3D Raum.
(Kreis : Gebogene Kurve (1D) im 2D Raum)

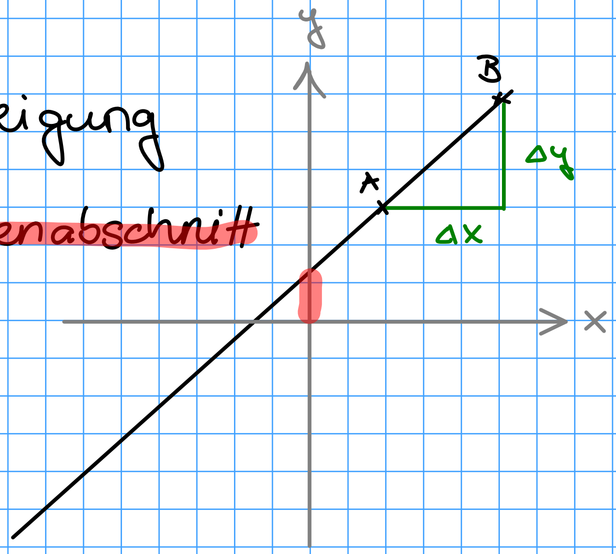


Geraden

Aufgabe 1

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ Steigung

q : y - Achsenabschnitt



a) $y = mx + q$

b) $m = \frac{3-7}{2-(-5)} = \frac{-4}{7} = -\frac{4}{7}$

$y = -\frac{4}{7}x + q$

$3 = -\frac{4}{7} \cdot 2 + q$

$3 + \frac{8}{7} = \frac{21}{7} + \frac{8}{7} = \frac{29}{7} = q$

$$\underline{\underline{y = -\frac{4}{7}x + \frac{29}{7}}}$$

c) $P(9/-1)$

$$-1 = -\frac{4}{7}\cdot 9 + \frac{29}{7} = \frac{-36+29}{7} = \frac{-7}{7} = -1$$

$\Rightarrow$ Punkt P liegt auf der Geraden g. (Korrekte Aussage $-1=-1$)

$Q(9/1)$

$$1 = -\frac{4}{7}\cdot 9 + \frac{29}{7} = -1 \quad \times$$

$\Rightarrow$ Q liegt nicht auf g.

Aufgabe 2

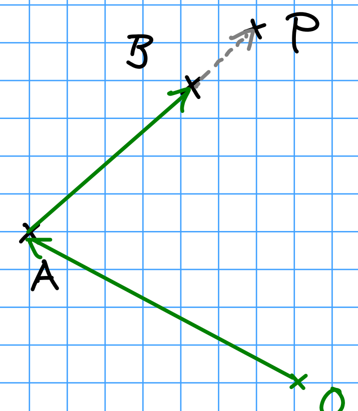
a) Es hat eine z-Koordinate. Kommt in der Gleichung $y = mx + q$ nicht vor.

b) $\vec{AB}$ und $\vec{AP}$ kollinear?

$$\begin{pmatrix}-19\\15\\-5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix} = s\cdot\left(\begin{pmatrix}-5\\7\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}\right) \qquad \vec{OP}-\vec{OA} = s\cdot\vec{AB}$$

$\Rightarrow$ gibt es ein s, welches für alle drei Komponenten stimmt?

$$\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-5-2\\7-3\\-1+4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-19\\15\\-5\end{pmatrix}$$



$$\vec{OA} + s\cdot\vec{AB} = \vec{OP}$$

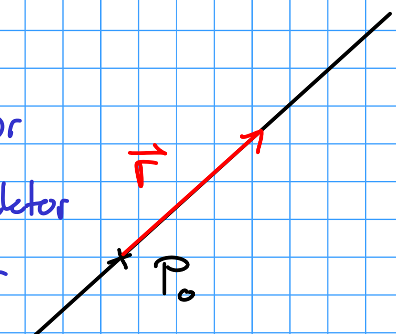
Parametergleichung der Gerade

$$g: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \vec{OP_0} + s\cdot\vec{r}$$

OP_0 : Stützvektor

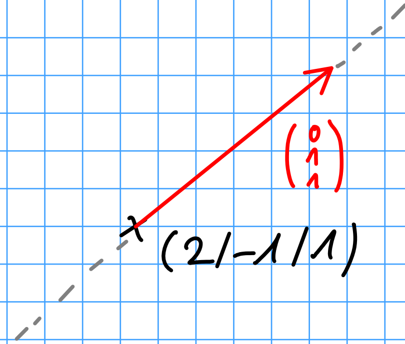
$\vec{r}$: Richtungsvektor

s : Parameter



Beispiel:

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Liegt P(3/0/2) auf g?

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 3 = 2 + 0s \\ 3 = 2 \ \times \end{array}$$

Liegt P(2/0/0) auf g?

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \Rightarrow 2 = 2 + 0 \cdot (-1) \Rightarrow 2 = 2 \ \checkmark \\ \Rightarrow 0 = -1 + 1 \cdot (-1) = 0 = -2 \ \times \\ \Rightarrow 0 = 1 + 1s \Rightarrow -1 = s \end{array}$$

Punkt liegt nicht auf g.

S. 32.: 14, 17

$\boxed{\text{HA: 14 a)}}$

---

9. Januar 2017

Funktion

Stützvektor: Vom Ursprung zu einem Punkt auf der Gerade. (Achtung: Nicht eindeutig.)

Richtungsvektor: Zeigt die Richtung der Gerade. (Unendlich viele Möglichkeiten. Zwei Richtungsvektoren derselben Gerade sind kolinear.)

Parameter: Mit welcher Zahl wird $\vec{r}$ verlängert/verkürz um den Punkt zu erreichen (Wie oft hat $\vec{r}$ zwischen P_0 und P platz?)

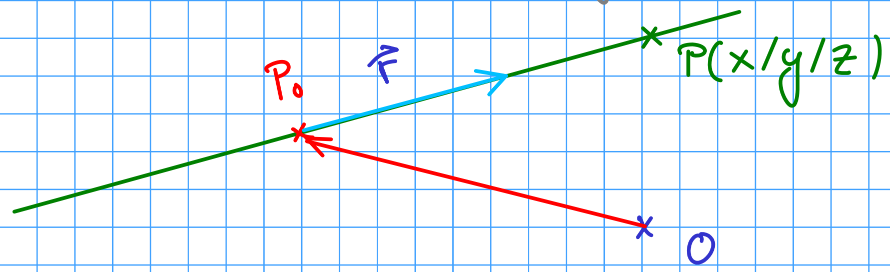
Stützvektor, Parameter

$$g: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \overrightarrow{OP_0} + s\cdot\vec{r} \leftarrow \text{Richtungsv.}$$

↑ Alle Punkte auf g.

$y = mx + b$

Geht in 3D nicht !



Spurpunkt: Schnittpunkt mit einer Koordinatenebene (z.B. xy-Ebene usw.)

Spezielle Lage: z.B. parallel zu einer Koordinatenebene oder Koordinatenachse (x-Achse usw.)

---

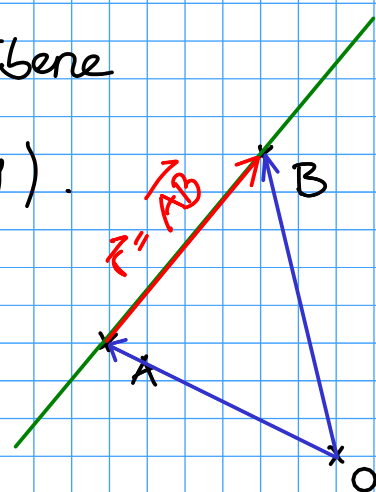
13. Januar 2017

Aufgabe 19. (Bestimmen von Spurpunkten)

a) $P(x/0/0) \to$ Liegt auf der x-Achse (nützt hier nichts)

$P(x/y/0) \to$ liegt auf der xy-Ebene

Gerade $A(3/1/6)$ und $B(4/-1/9)$.



$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\6\end{pmatrix} + s\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}4-3\\-1-1\\9-6\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}} = \begin{pmatrix}3\\1\\6\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\6\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} \Rightarrow 0 = 6 + 3s \Rightarrow s = -2$$

$x = 3 + (-2)\cdot 1 = 1 \qquad y = 1 + (-2)(-2) = 5 \qquad P(1/5/0)$

→ weiter mit Spurpunkt auf der yz-Ebene

→ " xz-Ebene

Gegenseitige Lage von Geraden

$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{OA} + s\,\vec{r_1}$ $\qquad$ $h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{OB} + t \cdot \vec{r_2}$

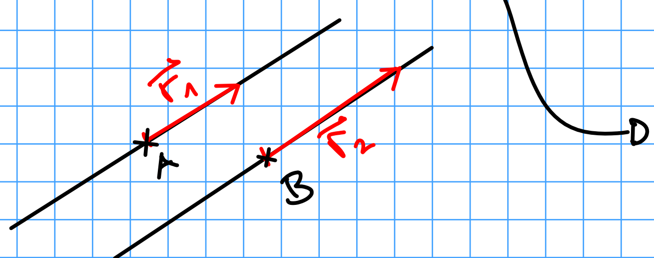
→ Sie schneiden sich.

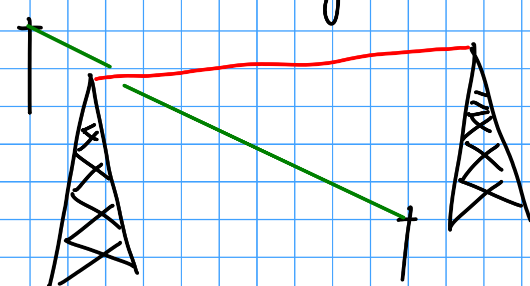
→ parallel zueinander

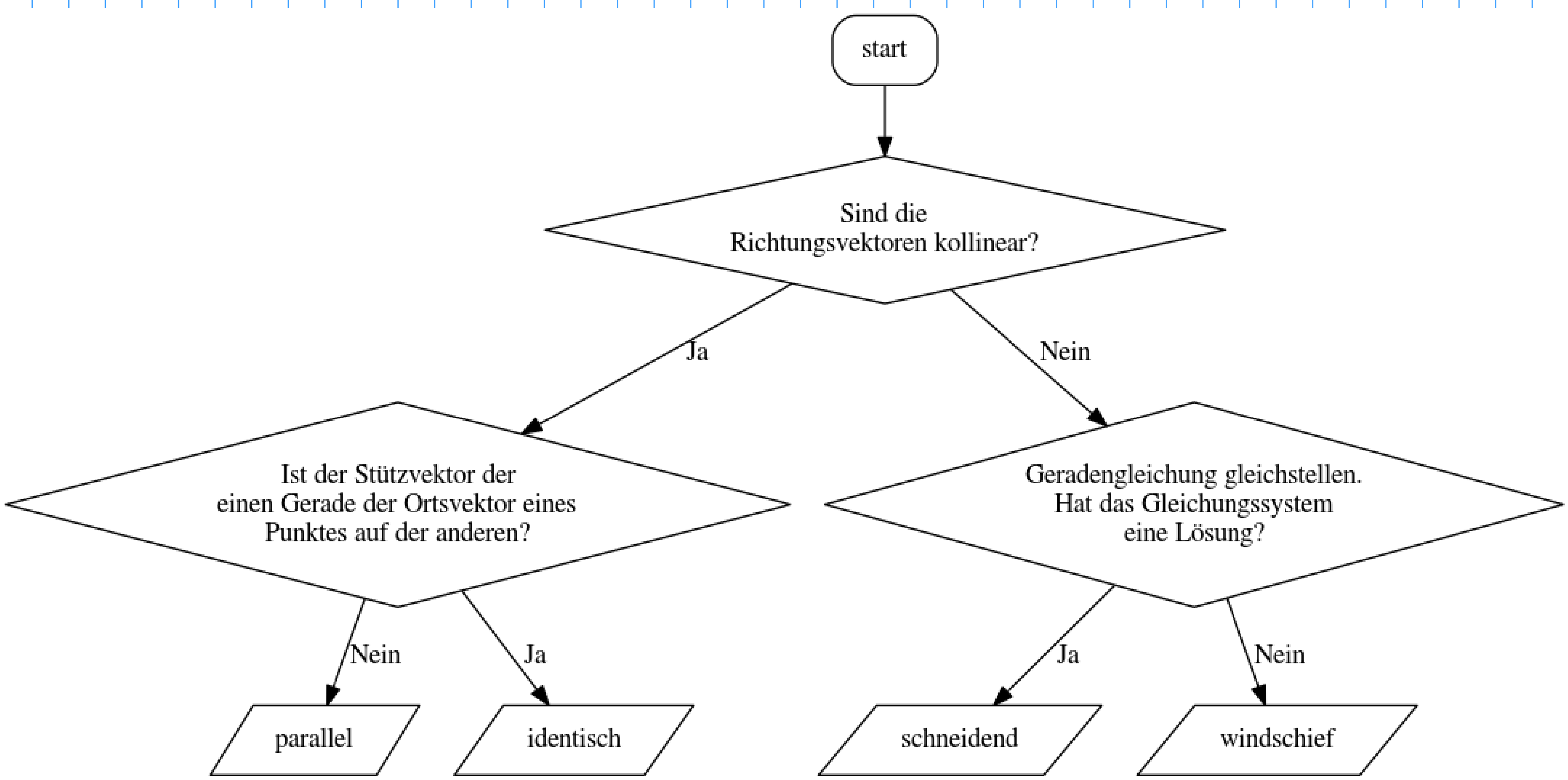
→ windschief

→ "aufeinander", g und h sind eigentlich dieselbe Gerade.

identisch / gleich







Gegenseitige Lage von Geraden.

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 51 \\ 6 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{l} 5 + 4s = 49 + 2t \\ 51 - s = 4 - 5t \\ 6 + 7s = 7 - 6t \end{array} \right|$$

Zwei Gleichungen lösen:

$$\left| \begin{array}{l} 5 + 4s = 49 + 2t \\ 6 + 7s = 7 - 6t \end{array} \right|$$

In die letzte Gleichung einsetzten um zu Prüfen, ob es einen Schnittpunkt gibt.

---

20. Januar 2017

\+ Aufgabe 24 mit Taschenrechner

Aufgabe 24 c) S. 33

$r1:=[4 \ \ -1 \ \ 7]$	$[4 \ \ -1 \ \ 7]$
$r2:=[2 \ \ -5 \ \ -6]$	$[2 \ \ -5 \ \ -6]$
$p1:=[5 \ \ 51 \ \ 6]$	$[5 \ \ 51 \ \ 6]$
$p2:=[49 \ \ 4 \ \ 7]$	$[49 \ \ 4 \ \ 7]$
$\text{solve}(p1+s\cdot r1=p2+t\cdot r2,\{s,t\})$	$s=7$ and $t=-8$
$p1+7\cdot r1$	$[33 \ \ 44 \ \ 55]$

*Doc

nichts schreiben

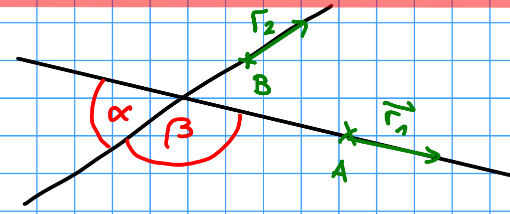
$$\begin{pmatrix} 5 \\ 51 \\ 6 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$\overset{\text{solve()}}{\Longrightarrow}$ $s = 7$ und $t = -8$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 51 \\ 6 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \overset{TR}{=} \begin{pmatrix} 33 \\ 44 \\ 55 \end{pmatrix}$$

$P(33/44/55)$

Schnittwinkel zweier Geraden:



$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{\|\vec{r}_1\| \cdot \|\vec{r}_2\|}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{\|\vec{r}_1\| \cdot \|\vec{r}_2\|}\right) \qquad \beta = 180° - \alpha$$

$p1+s\cdot r1 \mid s=7$	$[33\ \ 44\ \ 55]$
$\dfrac{\cos^{-1}\left(\dfrac{\text{dotP}(r1,r2)}{\text{norm}(r1)\cdot\text{norm}(r2)}\right)}{1°}$	116.28
180−116.28017642687	63.7198

$$\cos^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix}4\\-1\\7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-5\\-6\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}4\\-1\\7\end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix}2\\-5\\-6\end{pmatrix}\right\|}\right) \overset{TR}{=} 116.28°$$

$$\alpha \approx 63.72°$$

Aufgaben: 17, 18, 19, 23, 24 a) b), 26 a), 30
weitere (Haus-)Aufgaben: 14 b) c), 21, 25 a) (von Hand), 27, (28)

---

23. Januar 2017

Semesterprüfung: Mittwoch, 7.40 im Zimmer P24 3

+ Fragen zu den Hausaufgaben?

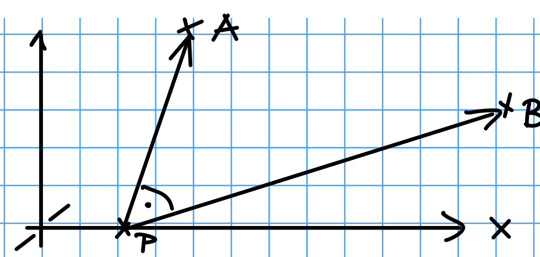
Aufgabe 1.
Gegeben sind die Punkte $A(3/-4/4)$, $B(6/4/3)$ und $C(6/5/5)$.

a) Berechne den Winkel $\measuredangle ABC$ von Hand (und mit der $\cos^{-1}()$-Funktion des Taschenrechners). Gib das Ergebnis in Grad an. (3 Pkt.)

b) Bestimme alle Punkte P auf der x-Achse so, dass das Dreieck ABP ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei P ist. (4 Pkt.)

b) $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$ $\quad P(x/0/0)$

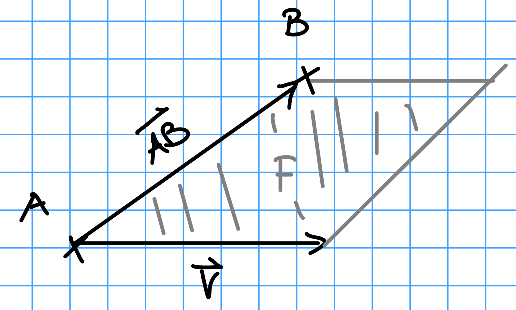
$\overset{\text{solve}}{\Rightarrow}$ $x = 2$ und $x = 7$



$P_1(2/0/0) \quad P_2(7/0/0)$

$a:=[3\ \ -4\ \ 4]$	$[3\ \ -4\ \ 4]$
$b:=[6\ \ 4\ \ 3]$	$[6\ \ 4\ \ 3]$
$p:=[x\ \ 0\ \ 0]$	$[x\ \ 0\ \ 0]$
solve(dotP($p-a,p-b$)=0,x)	x=2 or x=7

Aufgabe 2



$$\|\vec{AB} \times \vec{v}\| = F$$

$$\vec{w} = \vec{AB} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}$$

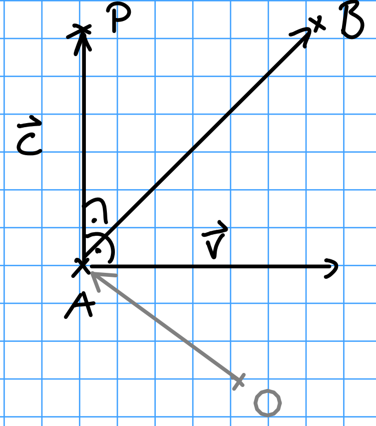
$$\|\vec{w}\| = \underline{\underline{18 = F}}$$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$b-a$	$[-2\ \ 2\ \ 1]$
crossP($b-a,v$)	$[12\ \ 6\ \ 12]$
norm($[12\ \ 6\ \ 12]$)	18

b) $\vec{OP} = \vec{AB} \times \vec{v} + \vec{OA}$

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix}$$



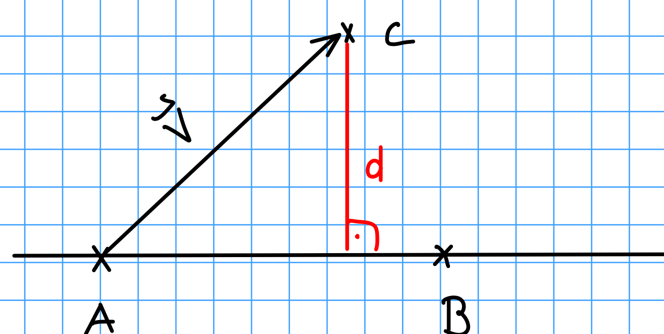
$P(9/4/13)$

c)

$$d = \frac{\|AB \times \vec{v}\|}{\|AB\|}$$

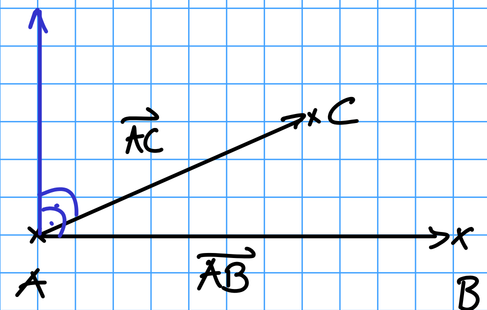
aus a)

$$d = \frac{18}{3} = 6$$



Aufgabe 3

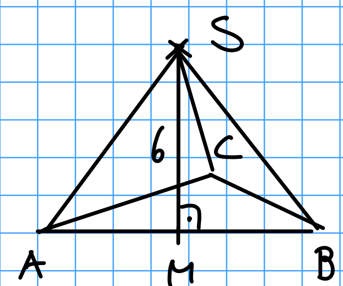
a) $\vec{c} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$



$$\frac{36}{\|\vec{c}\|}\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{36}{18}\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 12 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix}}}$$

b)

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$



$$\overrightarrow{MS} = \frac{6}{18}\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$S(5/2/12)$