Lösung 1.

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Die Gerade muss durch den Punkt $P(0/0/2)$ gehen. Es gilt also

$$\vec{r'} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Da die Länge des Richtungsvektors irrelevant ist, können wir den Richtungsvektor noch halbieren und erhalten die Geradengleichung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c) Nein, der Punkt liegt nicht auf der Gerade. Dies kann mit einem Gleichungssystem gezeigt werden. Wir betrachten dazu

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 6 & = & 4 - 2s \\ -5 & = & -2 + 6s \\ -1 & = & -1 - 2s \end{vmatrix}$$

Aus der letzten Zeile erhalten wir $s = 0$. Es ist aber

$$-5 \neq -2 + 6 \cdot 0$$

Also liegt der Punkt nicht auf g.

Lösung 2.

a) Wir können die beiden Geradengleichungen gleichsetzten und das Gleichungssystem mit dem Taschenrechner lösen. So erhalten wird

$$s = -1 \quad \text{und} \quad t = 3$$

und somit

$$P(-7/-4/10)$$

b) Ein Punkt auf der y-Achse hat die Koordinaten $P(0/y/0)$. Für die x-Koordinate muss $0 = -3 + 4s$ gelten, also $s = \frac{3}{4}$.

Wir prüfen, ob dies auch die Gleichung für die z-Koordinate erfüllt:

$$0 \neq 4 - 6 \cdot \frac{3}{4}$$

Also schneidet die Gerade die y-Achse nicht.

Lösung 3.

a) Wir suchen Q, so dass

$$\|\overrightarrow{QP_1}\| = \|\overrightarrow{QP_2}\|$$

gilt. Wobei wir aus der Geradengleichung wissen, dass

$$Q(7 + 2s/8 + 4s/ - 1 + s).$$

Wir setzten den Punkt in die Gleichung oben ein und erhalten $s = 2$. Somit ist $Q(11/16/1)$.

b) Wir brauchen einen winkelhalbierenden Vektor der Vektoren $\overrightarrow{P_1P_2}$ und dem Richtungsvektor von g. Also

$$r_w = \frac{1}{\|\overrightarrow{P_1P_2}\|}\overrightarrow{P_1P_2} + \frac{1}{\sqrt{2^2+4^2+1^2}}\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-25\sqrt{2}+\frac{2\sqrt{21}}{21}\\ \frac{4\sqrt{21}}{21}+15\sqrt{2}\\ \frac{\sqrt{21}}{21}+20\sqrt{2}\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}-34.92\\22.09\\28.5\end{pmatrix}$$

Also ist die Geradengleichung

$$w: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\8\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-34.92\\22.09\\28.5\end{pmatrix}$$

Lösung 4.

a) Wir müssen die Gleichung

$$\|PQ\| = 9 \quad \text{mit } Q \in g$$

lösen. Dies führt zur Gleichung

$$\begin{aligned}81 &= (-2+3s)^2 + (-20+8s)^2 + (13-3s)^2\\ &= 4 - 12s + 9s^2 + 400 - 320s + 64s^2 + 169 - 78s + 9s^2\\ &= 82s^2 + 410s + 573\end{aligned}$$

$$s^2 - 5s + 6 = (x-2)(x-3) = 0$$

Also ist $x = 2$ oder $s = 3$ und somit

$$Q_1(3/2/1) \quad Q_2(6/6/-2)$$

b) Wenn man sauber begründet, warum es so sein muss, findet man heraus, dass es sich um den Mittelpunkt von Q_1 und Q_2 handelt.

Hat man diese Punkte nicht, kann man wie folgt vorgehen: Der Abstand vom Punkt Q mit kürzestem Abstad muss senkrecht zur Gerade stehen. Also muss

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{r} = 0$$

gelten. Wir bestimmen also s, so dass gilt

$$\begin{pmatrix}-2+3s\\-20+8s\\13-3s\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\8\\-3\end{pmatrix} = 0.$$

Dies führt zur Gleichung

$$82s - 205 = 0$$

Somit ist $s = 2.5$ und somit ist $Q\left(\frac{9}{2}/2/-\frac{1}{2}\right)$.