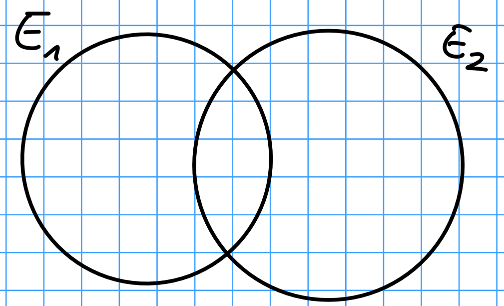
# Bedingte Wahrscheinlichkeit

29. September 2016




"oder" $\longrightarrow$ $P(E_1) + P(E_2)$

Gilt nicht, wenn $E_1 \cap E_2$ nicht leer ist. Dann gilt

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

"und" $\longrightarrow$ $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$

Gilt nicht, wenn die Ereignisse $E_1$ und $E_2$ voneinander "abhängen".

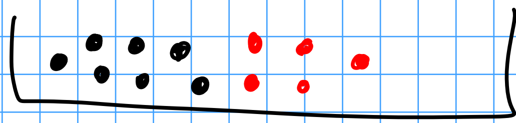
+ Ich würfle 100 Mal und erhalte nie eine 6. Ist nun die Wahrscheinlichkeit für eine 6 im 101. Wurf anders? $\frac{1}{6}$

  Unabhängigkeit der Würfe

+ Jeder 10. Schüler ist farbenblind. 9 Schüler einer Klasse stellen fest, dass sie nicht farbenblind sind. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der 10. Schüler farbenblind ist? $\frac{1}{10}$ Unabhängigkeit der Schüler

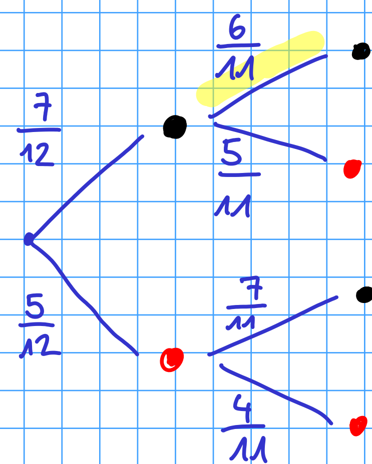
+ Man weiss, dass in der Tagesproduktion von 10'000 Stück 100 einen Fehler haben. Ich nehme zufällig 100 Stück aus der Produktion. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das 100. einen Fehler hat?

  $\cancel{\frac{100}{10'000}}$ $\qquad$ $\frac{1}{10'000 - 99}$ ? $\qquad$ Abhängigkeit

Urne: 

Was ist die Wahrscheinlichkeit, zwei Schwarze Kugeln hintereinander zu ziehen? $\frac{7}{12}$ $\frac{6}{11}$

: „Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Kugel schwarz ist unter der Bedingung, dass die erste schon schwarz war.



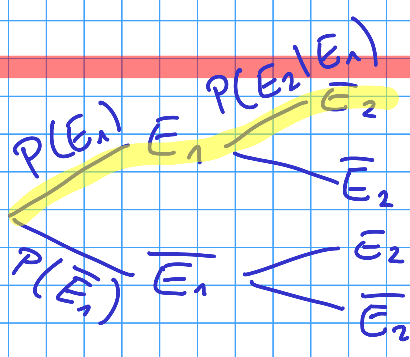

Wir schreiben:

$E_1$: „Erste Kugel schwarz"

$E_2$: „Zweite Kugel schwarz"

$P(E_2 | E_1)$ ist die bedingte Wahrscheinlichkeit von $E_2$ mit Bedingung $E_1$.

unter der Bedingung

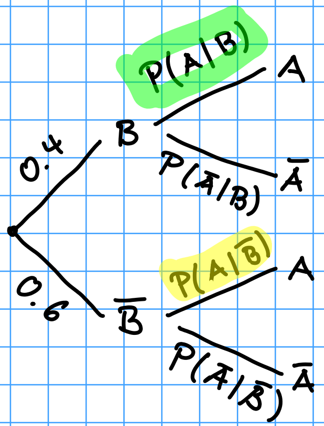



$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2 | E_1)$$

# Aufgabe 34

$P(A) = 0.6 \quad P(B) = 0.4$

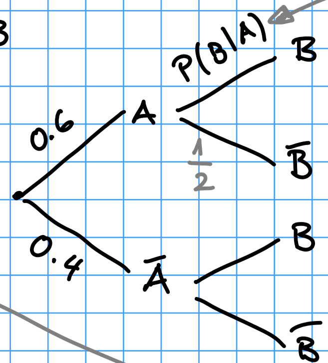
$P(A \cap B) = 0.3$




$P(A \cap B) = 0.3$

$P(\overline{B} \cap A) =$ ?

$\frac{0.3}{0.6} = \frac{1}{2}$




B 0.3

$P(\overline{B} \cap A) = 0.6 \cdot \frac{1}{2} = 0.3$

0.3

- $P(A \cup B) = 0.6 + 0.4 - 0.3 = 0.7$
- $\boxed{P(A \mid B)} = \frac{0.3}{0.4} = 0.75$

Wir wissen:

$0.3 = 0.4 \cdot P(A \mid B)$

- $\boxed{P(A \mid \overline{B})} = \frac{0.3}{0.6} = \frac{1}{2} = 0.5$

---

25. Oktober 2016

+ Prüfung retour (endlich...)
+ Lektionsaufteilung Stochastik/Vektorgeometrie
+ Repetition der bedingten Wahrscheinlichkeit

  -> Alternativer Zugang: Vierfelder-Tafel

Eine Urne enthält 100 Kugeln. 70 Kugeln bestehen aus Holz und 30 Kugeln sind aus Kunststoff. 25 der Holzkugeln haben die Farbe rot und 45 sind grün. 10 der Kunststoffkugeln sind rot und 20 sind grün.

$A$: „Kugel ist rot" $\bar{A}$: „Kugel ist grün"

$B$: „Kugel aus Holz" $\bar{B}$: „Kugel ist aus Kunsstoff"

$A|B$: „Eine $\underbrace{\text{Holz}}_{\text{Gegeben / Bedingung}}$kugel ist rot"

Die Kugel ist rot unter der Bedingung, dass sie aus Holz ist.

$P(A|B)$: „W'keit, dass eine Holzkugel rot ist."

$P(B|\bar{A})$: „W'keit, dass eine grüne Kugel aus Holz ist."

## Vierfeldertafel:

| | A | $\bar{A}$ | Summe |
|---|---|---|---|
| B | $A \cap B$ | $\bar{A} \cap B$ | $B$ |
| $\bar{B}$ | $A \cap \bar{B}$ | $\bar{A} \cap \bar{B}$ | $\bar{B}$ |
| | $A$ | $\bar{A}$ | 100 |

| | A | $\bar{A}$ | Summe |
|---|---|---|---|
| B | 25 | 45 | 70 |
| $\bar{B}$ | 10 | 20 | 30 |
| Summe | 35 | 65 | 100 |

$$P(A \cap B) = \frac{25}{100} = 0.25$$

$$P(A|B) = \frac{25}{70} \qquad P(B|A) = \frac{25}{35}$$

| | $A$ | $\bar{A}$ | Summe |
|---|---|---|---|
| $B$ | $P(A \cap B)$ | $P(\bar{A} \cap B)$ | $P(B)$ |
| $\bar{B}$ | $P(A \cap \bar{B})$ | $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ | $P(\bar{B})$ |
| Summe | $P(A)$ | $P(\bar{A})$ | $1$ |

$= P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$

...

Formel: $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

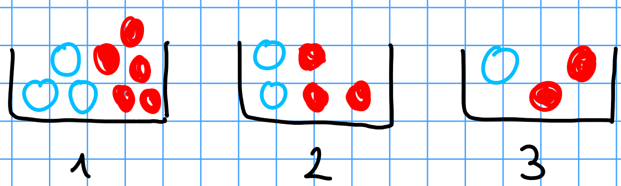
26. Oktober 2016

**Übung 36.**

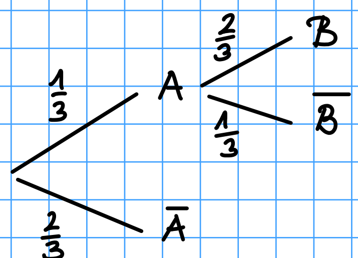
Von drei Schachteln enthält die erste drei weisse Kugeln und fünf rote Kugeln. Die zweite Schachtel enthält 2 weisse und 3 rote, die dritte eine weisse und zwei rote Kugeln.

Gegeben => Bedingung

Eine Schachtel wird zufällig ausgewählt um daraus eine Kugel zu ziehen. Die Kugel ist rot. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel aus der dritten Box kam?




Laplace: Alle Ergebniss müssen gleich wahrscheinlich sein.




B

| A | rot | $\overline{\text{rot}}$ | Summe |
|---|---|---|---|
| 3. Sch. | * $\frac{2}{9}$ | | |
| $\overline{\text{3. Sch}}$ | ** $\frac{16}{39}$ | | |
| Summe | $\frac{2}{9} + \frac{16}{39}$ | | $1$ |

* $P(A \cap B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

** $P(\bar{A} \cap B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{13} = \frac{16}{39}$

$$P(A|B) = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{9} + \frac{16}{39}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \approx \underline{\underline{35\%}}$$

$\boxed{\text{HA: } 37, 38}$ Auf Mittwoch

# + Unabhängige Ereignisse
# + Weitere Übungen

**Übung 37.**
Zwei faire Würfel werden geworfen. Sie zeigen zwei unterschiedliche Zahlen. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Zahlen gerade ist?

$$|\Omega| = 36 - 6 = 30$$

$$|E| = 18 \underline{- 6} = 12 = 3! \cdot 2$$

↳ Summen von zwei gleichen Zahlen sind gerade.

$$\frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{12}{30}$$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ✗ | | □ | | □ | |
| 2 | | ✗ | | □ | | □ |
| 3 | □ | | ✗ | | □ | |
| 4 | | □ | | ✗ | | □ |
| 5 | □ | | □ | | ✗ | |
| 6 | | □ | | □ | | ✗ |

$12 \times$ □

$$P = \frac{12}{30}$$

Mit bedingter W'keit:

A: "Gerade Summe"

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

B: "zwei ungleiche Zahlen"

$$P(A \cap B) = \frac{12}{36}$$

$$P(B) = \frac{30}{36}$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{\frac{12}{36}}{\frac{30}{36}} = \frac{12}{\cancel{36}} \cdot \frac{\cancel{36}}{30}$$

| | $A$ | $\bar{A}$ | Summe |
|---|---|---|---|
| $B$ | 12 | 18 | 30 |
| $\bar{B}$ | 6 | 0 | 6 |
| Summe | 18 | 18 | 36 |

# Unabhängige Ereignisse

Zwei Ereignisse heissen unabhängig, falls

$$P(A|B) = P(A)$$

(Die Bedingung B verändert die W'keit von A nicht)

Wenn zwei Ereignisse A und B unabhängig sind, gilt

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Beweis:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \Big| \cdot P(B)$$

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cap B) \quad \Big| \text{ Unabhängig } P(A|B) = P(A)$$

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B) \quad \boxed{\text{q}}$$

→ Weiter bei den Aufgaben.

Bis 40

\+ Fragen bis und mit Aufgabe 40
\+ Abschliessendes Beispiel zu bedingter W'keit.

## Aufgabe 39

| | > 25 | ≤ 25 | Summe |
|---|---|---|---|
| ♀ | 18'840 | 14'324 | 33'164 |
| ♂ | 41'819 | 25'017 | 66'836 |
| Summe | 60'659 | 39'341 | 100'000 |

a) $\frac{25'017}{100'000}$

b) $\frac{25'017}{66'836}$

c) $\frac{14'324}{39'341}$

**Übung 45.**

Für Infektionskrankheiten werden Schnelltests entwickelt, welche dazu dienen, die Krankheit schnell zu erkennen. Diese Tests liegen aber teilweise falsch. Ein Test für eine Krankheit, von welcher 0.1% der Bevölkerung betroffen ist, könnte zum Beispiel folgende Charakteristik haben:

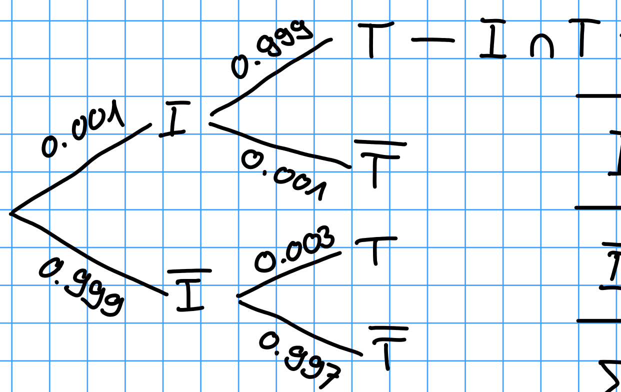
Bei 99.9% der tatsächlich infizierten Personen stellt der Test die Krankheit auch tatsächlich fest (*Sensitivität*). Bei 99.7% der nicht infizierten Personen fällt der Test auch tatsächlich negativ aus (*Spezifität*).

a) Angenommen, bei einer zufällig ausgewählten Person zeigt der Test ein negatives Ergebnis an. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person dennoch infiziert ist?

b) Bei einer zufällig ausgewählten Person fällt der Test positiv aus. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person wirklich infiziert ist?

c) Der Test wird zweimal durchgeführt und fällt beide male positiv aus. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die getestete Person tatsächlich infiziert ist?

$I$: "Person ist infiziert" $T$: „Test ist positiv"




| | $T$ | $\overline{T}$ | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|
| $I$ | $0.001 \cdot 0.999$ | $0.001 \cdot 0.001$ | $0.001$ |
| $\overline{I}$ | $0.999 \cdot 0.003$ | $0.999 \cdot 0.997$ | $0.999$ |
| $\Sigma$ | ... | ... | $1$ |

a) $P(I \mid \overline{T}) = \dfrac{0.001^2}{0.996004} = 0.000001$

b) $P(I \mid T) = \dfrac{0.001 \cdot 0.999}{0.003996} \approx 0.25 = 25\%$

c)