Lösung 1.

a) Wir setzten die Geradengleichung in die Ebenengleichung ein, was uns zur Gleichung

$$4(4-s)-2s-8(-2+s)=-24$$

fürt. Die Lösung dieser Gleichung ist $s=4$ und somit ist der Punkt $P(0/8/2)$

b) Wir müssen die Gerade in die Abstandsformel einsetzten:

$$28=\frac{4(4-s)-2s-8(-2+s)+24}{4^2+(-1)^2+(-8)^2}$$

Diese Gleichung hat die Lösungen $s=-14$. Diese führt zum Punkt

$$P_1(18/-28/-16).$$

Der Punkt kann auch auf der anderen Seite der Ebene liegen. Wir müssen also auch die Gleichung

$$-28=\frac{4(4-s)-2s-8(-2+s)+24}{4^2+(-1)^2+(-8)^2}$$

lösen. Diese hat die Lösung $s=22$ und somit ist der folgende Punkt

$$P_2(-18/44/20)$$

Lösung 2.

a) Wir müssen zeigen, dass die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ senkrecht aufeinander stehen. Dafür berechnen wir

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}1\\4\\-8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-8\\4\\1\end{pmatrix}=0$$

und

$$\|\overrightarrow{AB}\|=\|\overrightarrow{AD}\|=\sqrt{1^2+4^2+8^2}=9$$

b)

$$\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-11\\6\\8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\4\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\10\\0\end{pmatrix}$$

Also ist $C(-10/10/0)$.

c) Wir berechnen

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 36 \\ 63 \\ 36 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} \pm \frac{9}{\|\vec{n}\|} \cdot \vec{n}$$

Somit ist die gesuchte Ecke $E_1(2/13/3)$ und $E_2(-6/-1/-5)$.

Lösung 3.

$$\vec{n'} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} -72 \\ 9 \\ -36 \end{pmatrix}$$

Somit können wir als Normalenvektor den Vektor

$$\vec{n} = \frac{1}{9} \cdot \vec{n'} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

benutzen. Weiter betrechnen wir d über die Normalenform

$$d = \vec{n} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix} = 33$$

Somit ist die Ebene $-8x + y - 4z = 33$.

Nun ist

$$d_{g,h} = \left| \frac{-1 \cdot 24 + (-26) - 4(-2) - 33}{\sqrt{(-8)^2 + 1^2 + (-4)^2}} \right| = 27$$

Lösung 4.

a)

$$\cos^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|} \right) \approx 31.75°$$

b)

$$\vec{r'} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{pmatrix} 26 \\ -26 \\ -13 \end{pmatrix}$$

Also wählen wir als Richtungsvektor

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für den Stützvektor lösen wir das Gleichungssystem

$$\begin{vmatrix} 7x + 3y + 8z = 5 \\ -5x - 4y - 2z = 2 \end{vmatrix}$$

Daraus erhalten wir, dass die Punkte auf der Gerade die Form

$$P\left(x / -x-1 / -\frac{x}{2}+1\right)$$

haben. Wenn wir für $x = 0$ einsetzten, erhalten wir zum Beispiel $P(0/-1/1)$. Dies ergibt die Geradengleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung 5.

a)

$$r_1 = \|\overrightarrow{MP}\| - \sqrt{196} = 35 - 14 = 21$$

$$r_2 = \|\overrightarrow{MP}\| + \sqrt{196} = 35 + 14 = 49$$

$$\mathcal{K}_\infty : (x-6)^2 + (y+19)^2 + (z-10)^2 = 441$$
$$\mathcal{K}_\in : (x-6)^2 + (y+19)^2 + (z-10)^2 = 2401$$

b)

$$\vec{n} = \frac{1}{5} \cdot \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Der Punkt auf der Ebene ist

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OM} + \frac{14}{35}\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d = \vec{n} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 9$$

$$E: \ 2x - 6y + 3z = 9$$

Lösung 6.

a) Wir benötigen keine Geradengleichung, wir können einfach den Vektor $\overrightarrow{MP}$ auf die Länge des Radius' bringen und zum Ortsvektor von M addieren, respektive davon subtrahieren.

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MQ} = \frac{7}{\|\overrightarrow{MP}\|} \cdot \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} \frac{-14}{\sqrt{41}} \\ \frac{7}{\sqrt{41}} \\ \frac{42}{\sqrt{41}} \end{pmatrix}$$

$$Q_1 \left(-\frac{14\sqrt{41}}{41} + 6 / -6 + \frac{7\sqrt{41}}{41} / 6 + \frac{42\sqrt{41}}{41} \right)$$

$$Q_2 \left(\frac{14\sqrt{41}}{41} + 6 / -6 - \frac{7\sqrt{41}}{41} / -\frac{42\sqrt{41}}{41} + 6 \right)$$

b) Wir suchen einen Punkt $P \in \mathcal{K}$, so dass die folgenden Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{MP}\| &= 7 && \text{Eigentlich die Kugelgleichung} \\ \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{AP} &= 0 \\ \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{BP} &= 0 \end{aligned}$$

Dies gibt die Berührungspunkte

$$P_1(4/0/3) \quad \text{und} \quad P_2\left(\frac{144}{53}/\frac{8}{53}/\frac{351}{53}\right)$$

Da nur eine Lösung verlangt ist, rechnen wir mit P_1 weiter. Der Normalenvektor ist $\vec{n} = \overrightarrow{MP}$ und somit ist die Tangentialebene

$$2x - 6y + 3z = 17$$