Lösung 1.

a) Die Ableitung kann mit Hilfe der Summen und Potenzregel berechnet werden:

$$f'(x) = 3x^2 + 6 \cdot 3x + 9$$

Diese muss nun Null werden:

$$\begin{aligned} 0 &= 3x^2 + 12x + 9 && :3 \\ 0 &= x^2 + 4x + 3 && \text{Klammeransatz} \\ 0 &= (x+3)(x+1) \end{aligned}$$

Daraus folgt entwerde, dass $x + 3 = 0$ und daher $x_1 = -3$ oder $x + 1 = 0$ und somit $x_2 = 0$.

Die zweite Ableitung ist

$$f''(x) = 6x + 12$$

Es gilt $f''(-3) = 6(-3) + 12 = -6 < 0$, also handelt es sich bei x_1 um ein Maximum.

Zudem ist $f''(-1) = 6(-1) + 12 = 6$ und somit ist x_2 ein Minimum.

Da die Funktionswerte verlangt sind, müssen wir diese noch berechnen:

$$y_1 = (-3)^3 + 6(-3)^2 + 9(-3) = -27 + 54 - 27 = 0$$

$$y_2 = (-1)^3 + 6(-1)^2 + 9(-1) = -1 + 6 - 9 = -4$$

b)

$$\begin{aligned} 0 &= x^3 + 6x^2 + 9x && x \text{ ausklammern} \\ 0 &= x\left(x^2 + 6x + 9\right) && \text{Binomische Formel} \\ 0 &= x\,(x+3)^2 \end{aligned}$$

Nun kann jeder Faktor gleich Null gesetzt werden. Dies führt sofort zur Lösung $x_1 = 0$. Weiter erhalten wir:

$$\begin{aligned} (x+3)^2 &= 0 && \sqrt{\bullet} \\ x + 3 &= 0 && -3 \\ x_2 &= -3 \end{aligned}$$

Lösung 2.

a) Wir lösen die Gleichung $f_t'(2) = 0$ nach t auf und erhalten

$$t = \frac{5}{2}$$

Wir müssen noch prüfen, ob es sich dabei wirklich um ein Maximum handelt:

$$f''_{\frac{5}{2}}(2) \approx -14.14 < 0$$

Es handelt sich also um ein Maximum.

b) Die Tangente hat die Gleichng $g(x) = m\,x + q$. Wir haben die Bedingungen

$$\begin{aligned} g(0) &= f(0) \\ g(1) &= f(1) \\ m &= f'(1) \end{aligned}$$

Da $f(0) = 0$ ist, gilt

$$0 = g(0) = m \cdot 0 + q = q$$

Wir beschränken uns also auf $g(x) = m\,x$. Mit `solve()` erhalten wir $t = \frac{3}{2}$ und $m = \sqrt{2}$

$$g(x) = \sqrt{2}\,x$$

Lösung 3.

- Flächenformel und Skizze: 1 Punkt
- Zielfunktion mit eingesetzten Nebenbedingungen: 1 Punkt
- Ableitung gleich 0 setzen und Lösen: 1 Punkt
- Prüfen ob Maximum: 0.5 Punkte
- y-Werte der Punkte: 0.5 Punkte
- Fläche berechnen: 1 Punkt

Das Volumen eines Rehtecks ist das Produkt der Seiten. In unserem Fall ist das

$$V(x) = 2 \cdot x \cdot f(x) = 2 \cdot x \cdot \left(7 - \frac{x^2}{7}\right) = 14x - \frac{2x^3}{7}$$

Durch Ableiten erhalten wir

$$V'(x) = 14 - \frac{6}{7} \cdot x^2$$

$$V''(x) = -\frac{12}{7} \cdot x$$

Wir lösen $V'(x) = 0$ und erhalten

$$x = \sqrt{\frac{14 \cdot 7}{6}} = \sqrt{\frac{49}{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

Wie prüfen, ob es sich um ein Maximum handelt:

$$V''\left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{12}{3} \cdot \frac{7}{\sqrt{3}} < 0 \quad \Rightarrow \text{ Maximum}$$

Die y-Werte der Ecken

$$y = f\left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right) = \frac{14}{3}$$

Die Fläche beträgt:

$$V\left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right) = \frac{196 \cdot \sqrt{3}}{9} \approx 37.72$$

Lösung 4.

a)

$$\begin{aligned}\int 6\sqrt{x} + 9x^2 &= \int 6x^{\frac{1}{2}} + 9x^2 \\ &= 6 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 9 \cdot \frac{1}{3}x^3 + C \\ &= 4\left(\sqrt{x}\right)^3 + 3x^3 + C\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\left[4\sqrt{x}^3 + 3x^3\right]_1^4 &= 4\sqrt{4}^3 + 3 \cdot 4^3 - 4\sqrt{1}^3 - 3 \cdot 1^3 && \text{Hauptsatz} \\ &= 32 + 192 - 4 - 3 \\ &= 217\end{aligned}$$

Lösung 5.

a) Wir lösen die Gleichung $f(x) = g(x)$ mit dem Taschenrechner und finden heraus, dass die relevanten Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = 8$ sind.

$$F = \int_2^8 (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = 24 - 16 \cdot \ln(2) \approx 12.91$$

b) Mit der Gleichung $f(x) = 0$ finden wir die Grenzen der geteiltn Fläche: $x_1 = 0$ und $x_2 = 8$. Wir berechnen die beiden einelnen Flächen:

$$F_1 = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^8 g(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{8}{3} + 16 \cdot \ln(2) \approx 8.424$$

$$F_2 = \int_2^8 (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x \approx 12.91$$

$$\frac{F_2}{F_1} \approx 1.53$$

Lösung 6.

a)

$$\frac{1}{13}\int_{1.5}^{14.5} w(t)\,\mathrm{d}t \approx \frac{39.58}{13} \approx 3.04$$

b)

$$10 + \int_0^\infty w(t)\,\mathrm{d}t = 140$$

c)

$$10 + \int_0^b w(t)\,\mathrm{d}t = 128 \quad \xRightarrow{\texttt{solve()}} \quad b = 48.56$$