Produktregel - Analysis

zu beweisen: $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

Grundlagen: > $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ <= Differentialquotient

Beispiel: > Faktorisieren: $4a - 4b = 4(a\cdot b)$

Beweis:

Different. quotient

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h}$$

$$= f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x) + \overbrace{f(x+h)\cdot g(x) - f(x+h)\cdot g(x)}^{=0\text{, aber wichtig für nt. Schr}}}{h}$$

Faktorisieren

$$= f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot[g(x+h) - g(x)] + g(x)\cdot[f(x+h) - f(x)]}{h}$$

$$= f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot(g(x+h) - g(x))}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x)(f(x+h) - f(x))}{h}$$

$$= f'(x) = \lim_{h\to 0} \underbrace{f(x+h)}_{=0} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$g'(x)$ bzw. $f'(x)$

$$\boxed{f'(x) = f(x)\cdot g'(x) + g(x)\cdot f'(x)}$$ ■