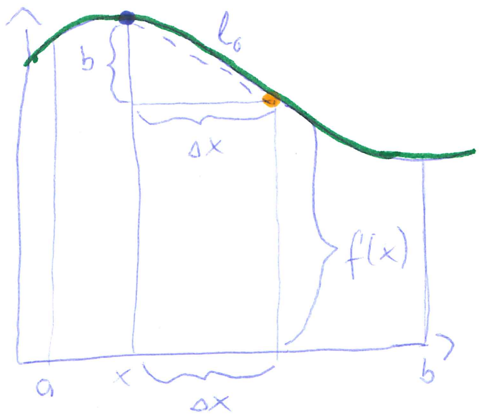
Beweis: Bogenlänge einer Kurve



Zu beweisen:

$$\int_a^b \sqrt{f'(x)^2+1}\,dx$$

Vorgehen: Um möglichst nahe an die Kurve zu kommen, teilen wir den Bereich von a bis b in unendlich viele Teile (Rechtecke) und berechnen von ihnen l_0

$$l_0 = \sqrt{\Delta x^2 + b^2}$$ | Phytagoras

y-wert von ●

$$= \sqrt{\Delta x^2 + (f(x+\Delta x) - f(x))^2}$$ ← y wert von Punkt ● | Differenz der Punkte ● und ● ergeben b

$$= \sqrt{\Delta x^2 \cdot \left(1 + \frac{(f(x+\Delta x) - f(x))^2}{\Delta x^2}\right)}$$ | Δx ausklammern, damit man Δx als Riemann summe schreiben kann

$$= \sqrt{\Delta x^2 \cdot \left(\left(\frac{f(x+\Delta x - f(x)}{\Delta x}\right)^2 + 1\right)}$$ | Potenzregel $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

$$= \Delta x \cdot \sqrt{\underbrace{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)^2}{\Delta x}}_{\text{Differenzenquotient, Limes fehlt aber noch}} + 1}$$ | wurzelgesetz: x^2 in wurzel läst wurzel auf

| Differenzenquotient = 1. Ableitung ohne Limes

$$= \Delta x \cdot \sqrt{f'(x)^2 + 1}$$ → Annäherung für 1 Rechteck | durch limes kann Annäherung an n-Rechtecke gemacht werden

$$l_0 \quad \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{f'(x)^2+1} \cdot \Delta x$$ | je kleiner Δx wird, desto näher kommen wir an die Kurve heran
je grösser n wird, desto näher kommen wir an Kurve an

$$= \boxed{\int_a^b \sqrt{f'(x)^2+1}\,dx}$$