Beweis Quotientenregel

Voraussetzung: Produktregel: $(u(x)\cdot v(x))' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$

Kettenregel: $(u(v(x)))' = u'(v(x))\cdot v'(x)$

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$f'(x) = \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \left(u(x)\cdot\frac{1}{v(x)}\right)' = \left(u(x)\cdot v(x)^{-1}\right)' \quad \Big|\ \text{Produktregel}$$

$$\left(u(x)\cdot v(x)^{-1}\right)' = u'(x)\cdot v(x)^{-1} + u(x)\cdot \underbrace{\left(-1\cdot v(x)^{-2}\cdot v'(x)\right)}_{\text{Kettenregel}}$$

$$= \frac{u'(x)\cdot v(x)}{v(x)\cdot v(x)} + \frac{u(x)\cdot(-1)\cdot v'(x)}{v(x)^2} \quad \Big|\ \frac{u'(x)}{v(x)} \text{ mit } v(x) \text{ erweitern}$$

$$= \frac{u'(x)\cdot v(x)}{v(x)^2} - \frac{u(x)\cdot v'(x)}{v(x)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v(x)^2}}$$