Vektorprodukt

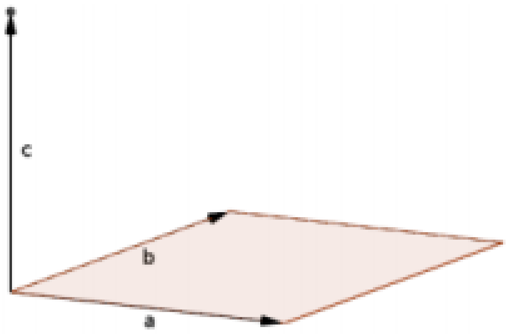
Berechnungsformel:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix}$$

Axiome:

Für Vektor $\vec{a} \, x \, \vec{b} = \vec{c}$

1. $\vec{c}$ steht senkrecht zu der Ebene von $\vec{a} und \ \vec{b}$
2. $\vec{c}$ entspricht betragsmässig der Fläche des von $\vec{a} und \ \vec{b}$aufgespannten Parallelogramms
3. $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem (drei gespreizte Finger mit rechts)



Beweis:

① $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ und $\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$

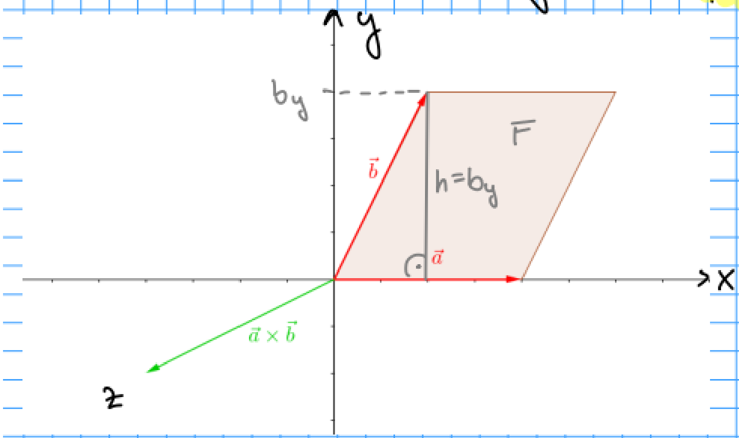
$$\begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x(a_y b_z - a_z b_y) + a_y(a_z b_x - a_x b_z)$$

$$+ a_z(a_x b_y - a_y b_x) = \cancel{a_x a_y b_z} - \cancel{a_x a_z b_y} + \cancel{a_y a_z b_x} - \cancel{a_y a_x b_z}$$

$$+ \cancel{a_z a_x b_y} - \cancel{a_z a_y b_x} = 0 \quad (\text{Mit } \vec{b} \text{ genauso})$$

② und ③ Voraussetzung: Rotieren und Verschieben verändert Winkel und Längen nicht.

Darum schauen wir folgenden Spezialfall an:



$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ 0 \end{pmatrix}$

$F = |\vec{a}| \cdot h = a_x \cdot b_y$

$|\vec{a} \times \vec{b}| \overset{?}{=} a_x b_y$

$$\begin{pmatrix} a_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ a_x \cdot b_y - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_x b_y \end{pmatrix}$$

a_x 0 b_x b_y

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (a_x b_y)^2} = \sqrt{(a_x b_y)^2} = |a_x b_y| = a_x b_y = F \checkmark$$

a_x und b_y positiv

Rechtssystem: Weil $a_x \geq 0$ $b_y \geq 0$ ist auch $a_x b_y > 0 \Rightarrow \vec{a} \times b$ zeigt in Richtung der positiven z-Achse. ✓