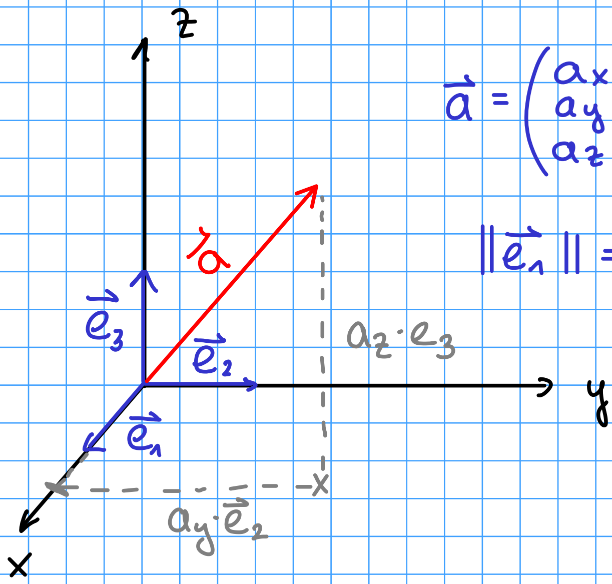
Vektorgeometrie 01: Das Skalarprodukt

S. 28: Aufgabe 12
S. 29: Aufgaben 16, 19, 20

Vektorraumbasis

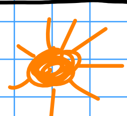


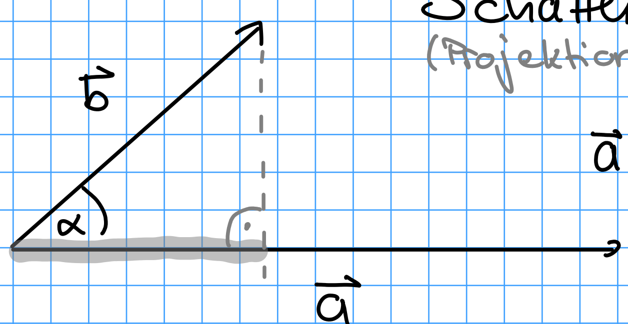
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x \cdot \vec{e}_1 + a_y \cdot \vec{e}_2 + a_z \cdot \vec{e}_3$$

$$\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\| = 1$$

Definition des Skalarprodukts

$\vec{a} \cdot \vec{b} \longrightarrow$ Die Länge von $\vec{a}$ multipliziert mit der Länge des senkrechten Schattens von b auf a.
(Projektion)





$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \quad \cdot \|\vec{a}\|$$

Wichtig: Das Ergebnis von $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ist eine Zahl (Skalar).

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$$

$$\longrightarrow \cos(\alpha) = \frac{\quad}{\|\vec{b}\|}$$

$$\Rightarrow \quad = \cos(\alpha)\cdot\|\vec{b}\|$$

$$\boxed{\vec{a}\circ\vec{b} = \|\vec{a}\|\cdot\underbrace{\|\vec{b}\|\cdot\cos(\alpha)}_{\text{Schatten}}}$$

Berechnungsformel ohne Winkel

$$\cancel{\begin{pmatrix} a_x b_x \\ a_y b_y \\ a_z b_z \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$

$$\vec{e_1}\cdot\vec{e_1} = \|\vec{e_1}\|\cdot\|\vec{e_1}\|\cdot\cos(0^\circ) = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$

$$\vec{e_1}\cdot\vec{e_2} = \|\vec{e_1}\|\cdot\|\vec{e_2}\|\cdot\cos(90^\circ) = 1\cdot 1\cdot 0 = 0$$

$\hookrightarrow$ Nur für Basisvektoren!

$$(a_x\vec{e_1} + a_y\vec{e_2} + a_z\cdot\vec{e_3})\cdot(b_x\vec{e_1} + b_y\vec{e_2} + b_z\vec{e_3})$$

$$= a_x\vec{e_1}\cdot b_x\vec{e_1} + a_x\vec{e_1}\cdot b_y\vec{e_2} + a_x\vec{e_1}\cdot b_z\vec{e_3}$$

$$= a_x b_x\underbrace{\vec{e_1}\cdot\vec{e_1}}_{1} + a_x b_y\underbrace{\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}}_{0} + a_x b_z\underbrace{\vec{e_1}\cdot\vec{e_3}}_{0}$$

$$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad \blacksquare$$

Winkelberechnung

$$\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos(\alpha) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}}$$

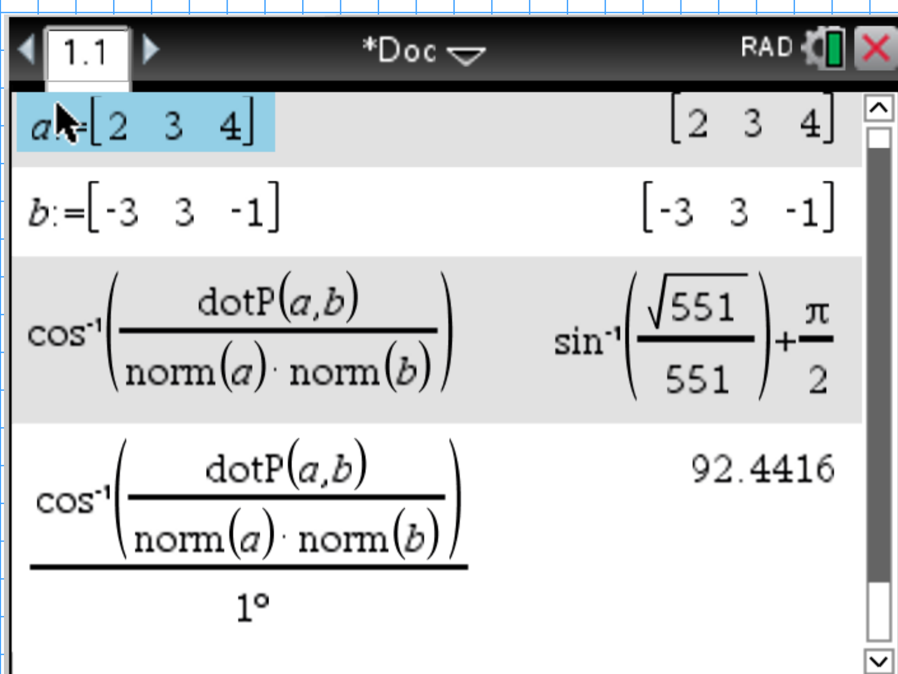
Spezialfall: $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

TR: $\|\vec{a}\| \longrightarrow$ norm(a)

$\vec{a} \cdot \vec{b} \longrightarrow$ dotp(a,b)

a := [3,7,1]

$\vec{a} := \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$



+ Aufgaben zum Skalarprodukt

Signist / Wirth S. 13 (Kopie)

Achtung:

A(x / y / z) ist ein Punkt (d.h. Ort)

$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ist ein Vektor (d.h. Richtung und Betrag / Länge)

©Aufgabe 1

$a:=[2\ \ 1\ \ 0]$	$[2\ \ 1\ \ 0]$
$b:=[3\ \ -1\ \ 2]$	$[3\ \ -1\ \ 2]$
$c:=[8\ \ 3\ \ 3]$	$[8\ \ 3\ \ 3]$
$\dfrac{\cos^{-1}\left(\dfrac{\operatorname{dotP}(b-a,c-a)}{\operatorname{norm}(b-a)\cdot \operatorname{norm}(c-a)}\right)}{1°}$	67.6073

HA: Bis 3 a)

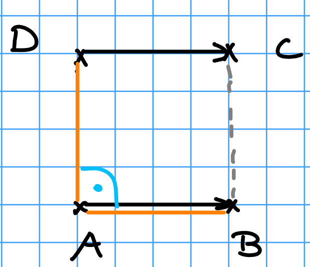
07. August 2016

Lösungen bis 3

A. 1: $\measuredangle BAC = 67.6°$

A. 2 ① $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; ② $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}|$; ③ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

A. 3: a) $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \Rightarrow \measuredangle ACB = 90°$



① Länge und Parallelität ist gezeigt.

② Längen

③ 90° - Winkel

b) 22.5°

→ Weiter bei 3 b / 4

Grünes Heft: 18, S. 29

$b:=[-2 \quad 2 \quad 0]$ $\qquad [-2 \quad 2 \quad 0]$

$c:=[t \quad 1+t \quad 4-t]$ $\qquad [t \quad t+1 \quad 4-t]$

$c1:=c|t=1$ $\qquad [1 \quad 2 \quad 3]$

$$\frac{\cos^{-1}\left(\frac{\text{dotP}(a-b,c1-b)}{\text{norm}(a-b)\cdot\text{norm}(c1-b)}\right)}{1°} \qquad 45$$

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$$
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$$
$$\cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\|\cdot\|\overrightarrow{BC}\|}\right)$$

$\cos(45°)$ $\qquad \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\text{solve}\left(\frac{\text{dotP}(a-b,c-b)}{\text{norm}(a-b)\cdot\text{norm}(c-b)}=\frac{\sqrt{2}}{2},t\right)$$

$t=-11$ or $t=1$

Ortsvektoren der Punkt.

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$$
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}.$$
$$\cos(45°) = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\|\cdot\|\overrightarrow{BC}\|}$$

solve()

$\Rightarrow \quad t=-11 \qquad t=1$

O: Ursprung (0/0/0)

(Origin)