Vektorgeometrie 02: Das Vektorprodukt

14. September 2016

Gegeben: Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Vektorprodukt $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

(1) ! • $\vec{c}$ steht senkrecht zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$

(2) ! • $\|\vec{c}\|$ entspricht des Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Paralellogramms. (Betragsmässig - ohne Einheiten)

(3) • $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

<u>Berechnungsformel für das Vektorprodukt:</u>

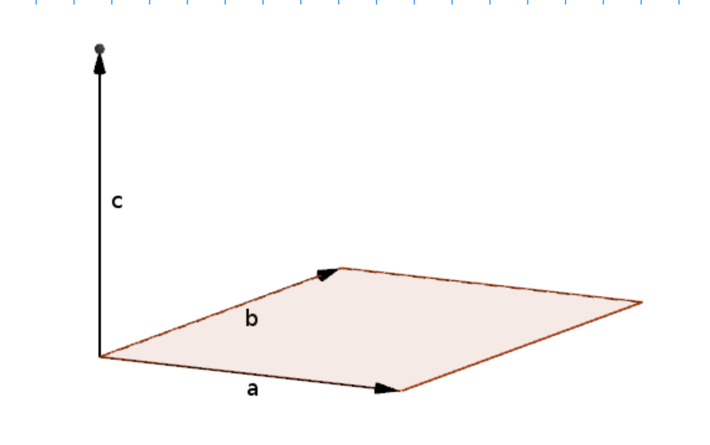
$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} a_x & & b_x \\ a_y & & b_y \end{matrix}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 2 - 7(-1) \\ 7 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \\ 3(-1) - (-2) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 3 & & 1 \\ -2 & & -1 \end{matrix}$$



Beweis:

① $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ und $\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$

$$\begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x(a_y b_z - a_z b_y) + a_y(a_z b_x - a_x b_z)$$

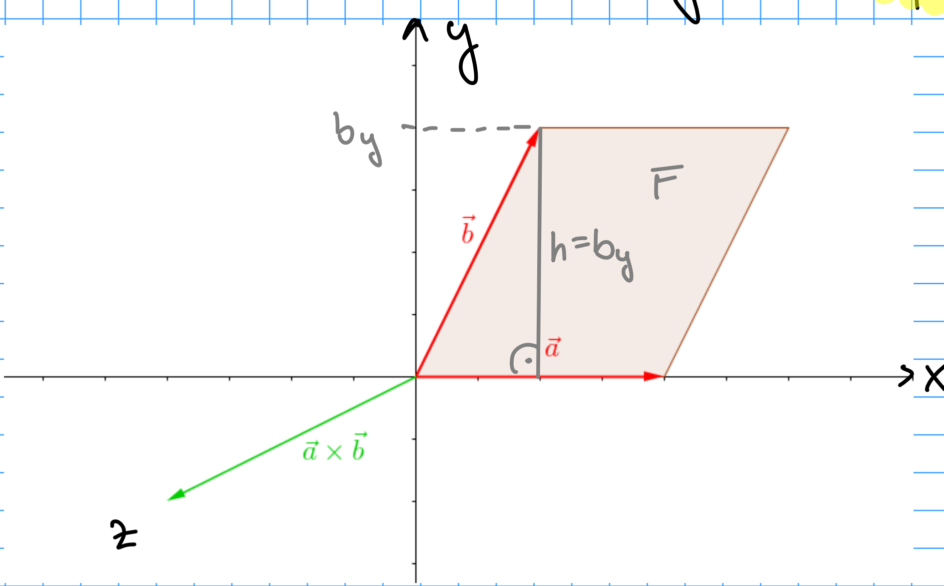
$$+ a_z(a_x b_y - a_y b_x) = \cancel{a_x a_y b_z} - \cancel{a_x a_z b_y} + \cancel{a_y a_z b_x} - \cancel{a_y a_x b_z}$$

$$+ \cancel{a_z a_x b_y} - \cancel{a_z a_y b_x} = 0 \quad (\text{Mit } \vec{b} \text{ genauso})$$

② und ③ Voraussetzung: Rotieren und Verschieben verändert Winkel und Längen nicht.

21. September 2016

Darum schauen wir folgenden Spezialfall an:



$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ 0 \end{pmatrix}$

$F = |\vec{a}| \cdot h = a_x \cdot b_y$

$|\vec{a} \times \vec{b}| \overset{?}{=} a_x b_y$

$$\begin{pmatrix} a_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ a_x \cdot b_y - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_x b_y \end{pmatrix}$$

$a_x \; 0 \qquad b_x \; b_y$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (a_x b_y)^2} = \sqrt{(a_x b_y)^2} = |a_x b_y| = a_x b_y = F \checkmark$$

a_x und b_y positiv

Rechtssystem: Weil $a_x \geq 0$ $b_y \geq 0$

ist auch $a_x b_y > 0 \Rightarrow \vec{a} \times b$ zeigt in Richtung der positiven z-Achse. ✓

+ Lernziele Prüfung 5 - 7 Punkte

↳ Kombinatorik Vektorgeometrie (Skalarprod.)

Aufgaben zu Vektor-Produkt:

Aufgaben 1 - 3 (Blatt)

Aufgabe 16 a) S. 53 } Grünes Heft.

Aufgabe 18 "

---

28. September 2016

Welche Höhe hat die Pyramide?

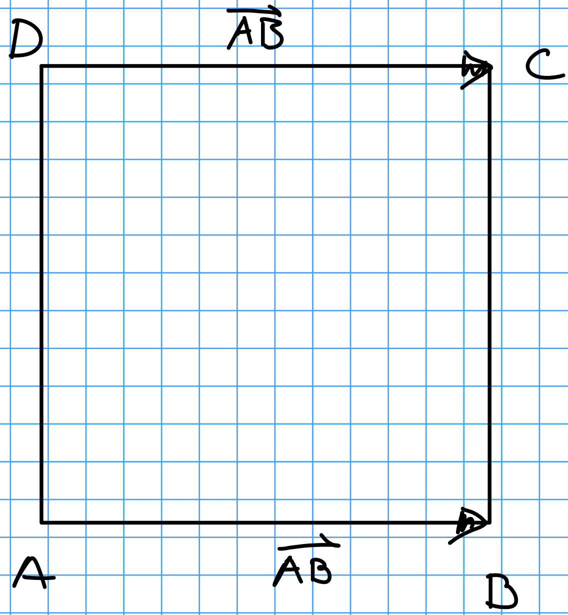
aus Aufgabe a)

$$V = \frac{G \cdot h}{3} = \frac{\cancel{6}^{2} \cdot h}{\cancel{3}_{1}} = 18 \quad |:2$$

$$h = 9$$

crossP$(b-a,c-a)$	$[8 \ \ -8 \ \ -4]$
$n:=\frac{[8 \ \ -8 \ \ -4]\cdot 9}{12}$	$[6 \ \ -6 \ \ -3]$
$m:=\frac{b+c}{2}$	$\overrightarrow{OM} = [2 \ \ 1 \ \ 3]$

$n:=\frac{[8 \ \ -8 \ \ -4]\cdot 9}{12}$	$\overrightarrow{MD} = [6 \ \ -6 \ \ -3]$
$m:=\frac{b+c}{2}$	$[2 \ \ 1 \ \ 3]$
$m+n$	$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MD} = [8 \ \ -5 \ \ 0]$
$m-n$	$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{MD} = [-4 \ \ 7 \ \ 6]$



$a:=[3\ \ 3\ \ 2]$	$[3\ \ 3\ \ 2]$
$b:=[1\ \ 1\ \ 1]$	$[1\ \ 1\ \ 1]$
$c:=[-1\ \ 2\ \ 3]$	$[-1\ \ 2\ \ 3]$
$(\mathrm{norm}(b-a))^3$	27
$d:=c+a-b$	$[1\ \ 4\ \ 4]$
$\mathrm{crossP}(c-a,b-a)$	$[3\ \ -6\ \ 6]$
$\mathrm{unitV}([3\ \ -6\ \ 6])\cdot \mathrm{norm}(b-a)$	$[1\ \ -2\ \ 2]$
$n:=[1\ \ -2\ \ 2]$	$[1\ \ -2\ \ 2]$
$a+n$	$[4\ \ 1\ \ 4]$
$b+n$	$[2\ \ -1\ \ 3]$