

Vektorgeometrie 02: Das Vektorprodukt

14. September 2016

Gegeben: Vektoren \vec{a} und \vec{b} .

Vektorprodukt $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

- ① \vec{c} steht senkrecht zu \vec{a} und \vec{b}
- ② $\|\vec{c}\|$ entspricht der Fläche des von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogramms. (Betragsmäßig - ohne Einheiten)
- ③ \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

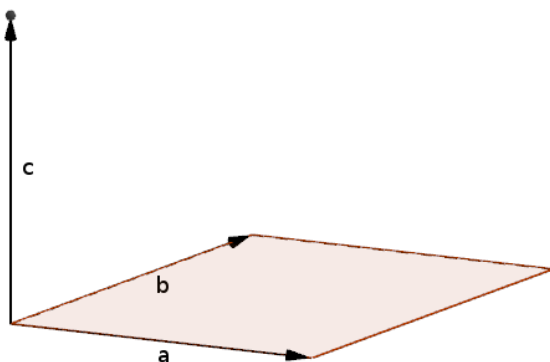
Berechnungsformel für das Vektorprodukt:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix}$$

Diagramm zur Berechnung des Vektorprodukts: Zwei Vektoren $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ und $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ sind dargestellt. Die Komponenten a_x, a_y, a_z sind in einem Kreislauf (rot, grün, orange) markiert, ebenso wie b_x, b_y, b_z . Die resultierenden Komponenten des Vektorprodukts sind farblich markiert: die erste Komponente $a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y$ ist grün gestrichelt, die zweite $a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z$ ist orange gestrichelt, und die dritte $a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x$ ist blau gestrichelt.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 2 - 7 \cdot (-1) \\ 7 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot (-1) - (-2) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



Beweis:

$$\textcircled{1} \quad \vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{c} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a_x \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x(a_y b_z - a_z b_y) + a_y(a_z b_x - a_x b_z)$$

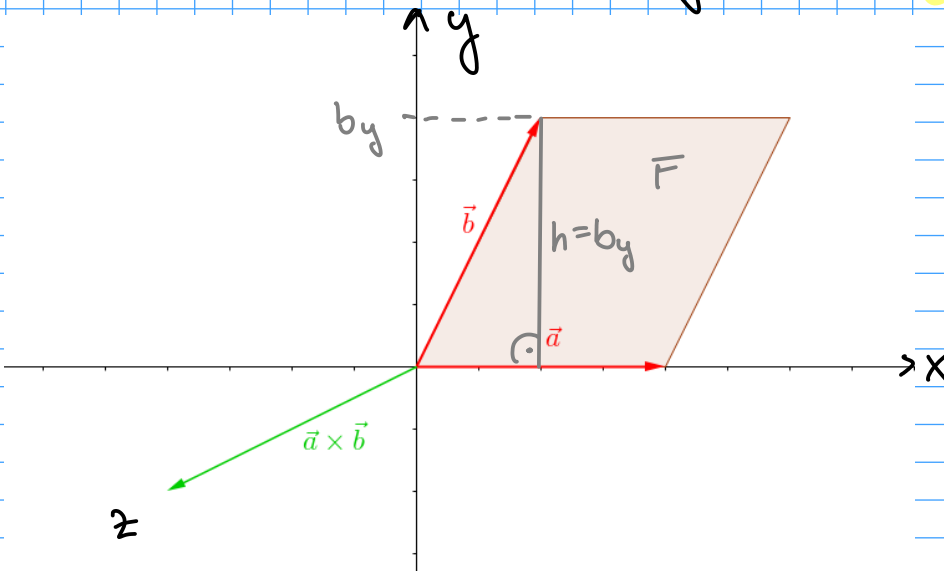
$$+ a_z(a_x b_y - a_y b_x) = \cancel{a_x a_y b_z} - \cancel{a_x a_z b_y} + \cancel{a_y a_z b_x} - \cancel{a_y a_x b_z}$$

$$+ \cancel{a_z a_x b_y} - \cancel{a_z a_y b_x} = 0 \quad (\text{Mit } \vec{b} \text{ genauso})$$

② und ③ Voraussetzung: Rotieren und Verschieben verändert Winkel und Längen nicht.

21. September 2016

Darum schauen wir folgenden **Spezialfall** an:



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F = |\vec{a}| \cdot h = a_x \cdot b_y$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| \stackrel{?}{=} a_x b_y$$

$$\begin{pmatrix} a_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ a_x \cdot b_y - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_x b_y \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (a_x b_y)^2} = \sqrt{(a_x b_y)^2} = |a_x b_y| = a_x b_y = F \checkmark$$

\uparrow
ax und by
positiv

Rechtssystem: weil $a_x \geq 0$ $b_y \geq 0$

ist auch $a_x b_y > 0 \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b}$ zeigt in Richtung der positiven z-Achse. \checkmark

+ Lernziele Prüfung

↳ Kombinatorik

5-7 Punkte

Vektorgeometrie (Skalarprod.)

Aufgaben zu Vektor-Produkt:

Aufgaben 1-3 (Blatt)

Aufgabe 16 a) S. 53 } Grünes

Aufgabe 18 " " } Heft.

28. September 2016

Welche Höhe hat die Pyramide?

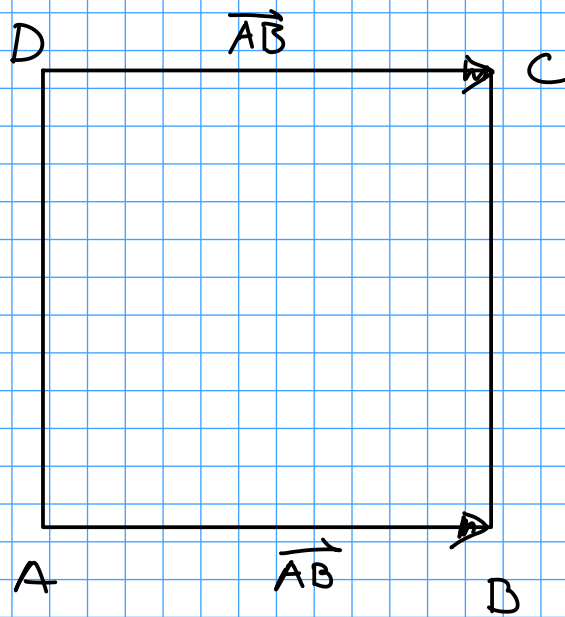
$$V = \frac{G \cdot h}{3} = \frac{6 \cdot h}{3} = 18 \quad | : 2$$

2 aus Aufgabe a)
1

$$h = 9$$

$$\begin{aligned} \text{crossP}(b-a, c-a) &= [8 \ -8 \ -4] \\ n &= \frac{[8 \ -8 \ -4] \cdot 9}{12} \\ m &= \frac{b+c}{2} \end{aligned}$$
$$\vec{OM} = [2 \ 1 \ 3]$$

$$\begin{aligned} n &= \frac{[8 \ -8 \ -4] \cdot 9}{12} & \vec{MD} &= [6 \ -6 \ -3] \\ m &= \frac{b+c}{2} & & [2 \ 1 \ 3] \\ m+n & & \vec{OM} + \vec{MD} &= [8 \ -5 \ 0] \\ m-n & & \vec{OM} - \vec{MD} &= [-4 \ 7 \ 6] \end{aligned}$$



| | |
|------------------------|----------------|
| $a := [3 \ 3 \ 2]$ | $[3 \ 3 \ 2]$ |
| $b := [1 \ 1 \ 1]$ | $[1 \ 1 \ 1]$ |
| $c := [-1 \ 2 \ 3]$ | $[-1 \ 2 \ 3]$ |
| $(\text{norm}(b-a))^3$ | 27 |
| $d := c+a-b$ | $[1 \ 4 \ 4]$ |

| | |
|---|----------------|
| $\text{crossP}(c-a, b-a)$ | $[3 \ -6 \ 6]$ |
| $\text{unitV}([3 \ -6 \ 6]) \cdot \text{norm}(b-a)$ | $[1 \ -2 \ 2]$ |
| $n := [1 \ -2 \ 2]$ | $[1 \ -2 \ 2]$ |
| $a+n$ | $[4 \ 1 \ 4]$ |
| $b+n$ | $[2 \ -1 \ 3]$ |