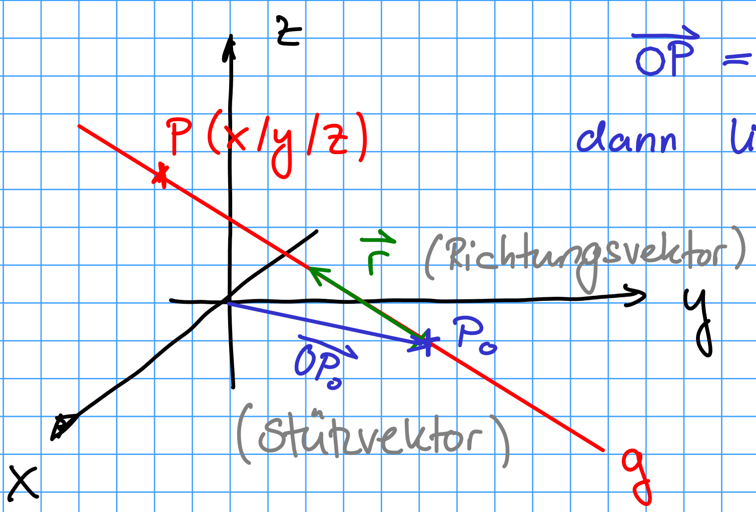
Geraden im dreidimensionalen Raum

27. Oktober 2016

+ Grundproblemkategorien in der Vektorgeometrie

Problemstellungen	Objekte	Werkzeuge
– Schnittprobleme	Punkt	Vektoren
– Abstandsprobleme	Geraden	Skalarprodukt
– Winkelberechnung	Ebenen	Vektorprodukt
	Kugeln	

Geraden



Falls ein s existiert, so dass gilt:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + s \cdot \vec{r}$$

dann liegt P auf g

Parametergleichung der Geraden

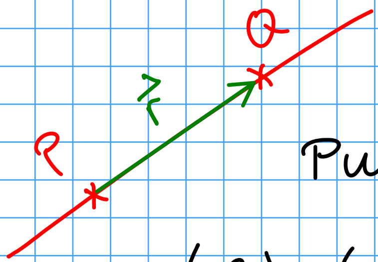
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}$$

Parameter

Beispiel:

Liegt der Punkt A(-2/4/1) auf der Geraden durch P(2/2/1) und Q(-3/1/2).

Geradengleichung: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{PQ}}$



Punkt einsetzen:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Gleichung → $-2 = 2 - 5s \Rightarrow s = \frac{4}{5}$
2. Gleichung → $4 = 2 - \frac{4}{5} \cancel{=} \frac{6}{5}$
3. Gleichung

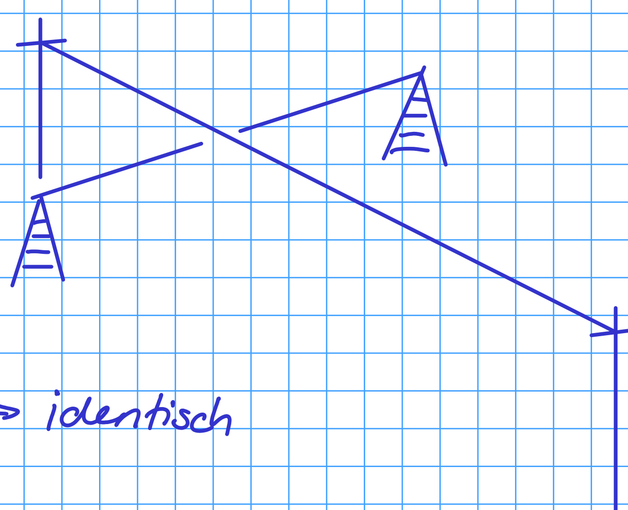
(aber: 1 Unbekannte)

$\Rightarrow$ Es gibt kein Skalar s, welcher alle Gleichungen erfüllt, also liegt A nicht auf der Geraden PQ.

S. 32: A. 14 – 17, 19

Gegenseitige Lage von Geraden

- Parallel
- sich schneiden*
- windschief



* in einem Punkt
  in unendlich vielen Punkten → identisch

① Parallelität prüfen: Die Richtungsvektoren sind bei parallelen Geraden kollinear.

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP_0} + s\cdot\overrightarrow{r_1} \qquad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP_1} + s\cdot\overrightarrow{r_2}$$

$$\overrightarrow{r_1} = s\cdot\overrightarrow{r_2}$$

Beispiel:

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$-4 = 2s \Rightarrow s = -2$

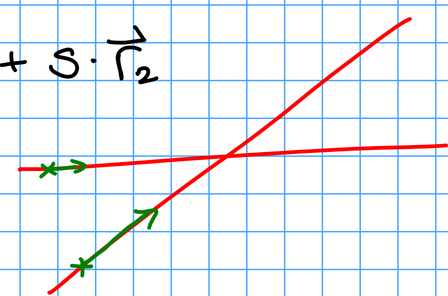
$2 = (-2)\cdot(-1) = 2$ ✓

$-6 = (-2)\cdot 3 = -6$ ✓

$\Longrightarrow$ Geraden sind parallel oder identisch

② Schneiden sich die Geraden? Wir setzen die Geraden gleich.

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP_0} + s\cdot\overrightarrow{r_1} \qquad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP_1} + s\cdot\overrightarrow{r_2}$$



$$\overrightarrow{OP_0} + s\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{OP_1} + \overset{t}{\cancel{s}}\,\overrightarrow{r_2}$$

$$g = h \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + \overset{t}{\cancel{s}}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{rcl} 2 - 4s &=& -2 + 2t \\ -2 + 2s &=& 0 - t \\ 1 - 6s &=& -5 + 3t \end{array} \right|$$

⚠ Die beiden Parameter müssen unterschieden werden!

① 2 Gleichungen auswählen

② In der 3. die Lösung prüfen.

$2-4s = -2+2t$

Einsetzen

$-2+2s = -t$

$t = 2-2s$

Wahre Aussage $0=0$ => Geraden sind identisch

Lösung $s=\dots$, $t=\dots$ => Geraden schneiden sich

Falsche Aussage $0=7$ => Geraden sind windschief (oder parallel)

$2-4s = -2+2(2-2s)$

$2-4s = -2+4-4s$

$0=0$

Für alle s und t ist $0=0$ wahr

=> Identisch

Gleichungssystem mit TR:

"true" => identisch.

"false" => windschief / parallel.

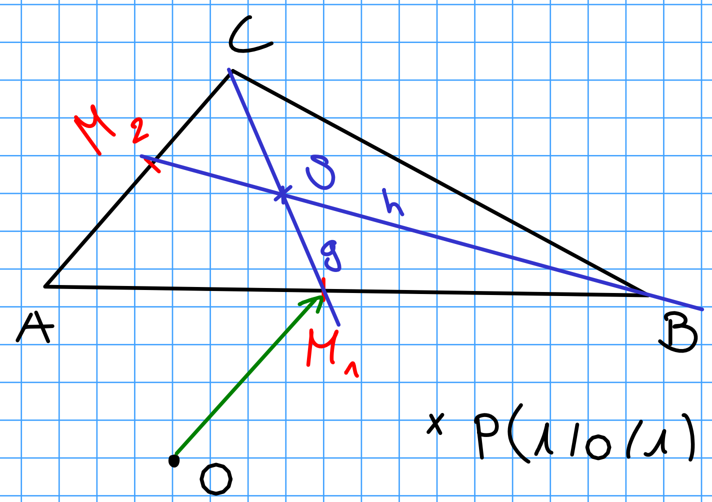
s=... and t=... => sie schneiden sich.

Schnittpunkt: s oder t einsetzen.

$\boxed{\text{HA: } 14-16}$

---

3. November 2016



$\times\ P(1|0|1)$

$g: \overrightarrow{OC} + s\cdot\overrightarrow{M_1C} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$h: \overrightarrow{OB} + t\cdot\overrightarrow{M_2B} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$S(3/\frac{1}{3}/\frac{5}{3})$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1-3 \\ 0-\frac{1}{3} \\ 1-\frac{5}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

14 – 17, 19, 23

$a:=[4\ \ 1\ \ 3]$ → $[4\ \ 1\ \ 3]$

$b:=[-2\ \ -4\ \ 3]$ → $[-2\ \ -4\ \ 3]$

$c:=[7\ \ 4\ \ -1]$ → $[7\ \ 4\ \ -1]$

$m1:=\frac{a+b}{2}$ → $\left[1\ \ \frac{-3}{2}\ \ 3\right]$

$m2:=\frac{a+c}{2}$ → $\left[\frac{11}{2}\ \ \frac{5}{2}\ \ 1\right]$

$g:=c+s\cdot(c-m1)$ → $\left[6\cdot s+7\ \ \frac{11\cdot s}{2}+4\ \ -4\cdot s-1\right]$

$h:=b+t\cdot(b-m2)$ → $\left[\frac{-15\cdot t}{2}-2\ \ \frac{-13\cdot t}{2}-4\ \ 2\cdot t+3\right]$

$\text{solve}(g=h,\{s,t\})$ → $s=\frac{-2}{3}$ and $t=\frac{-2}{3}$

$g|s=\frac{-2}{3}$ → $\left[3\ \ \frac{1}{3}\ \ \frac{5}{3}\right]$

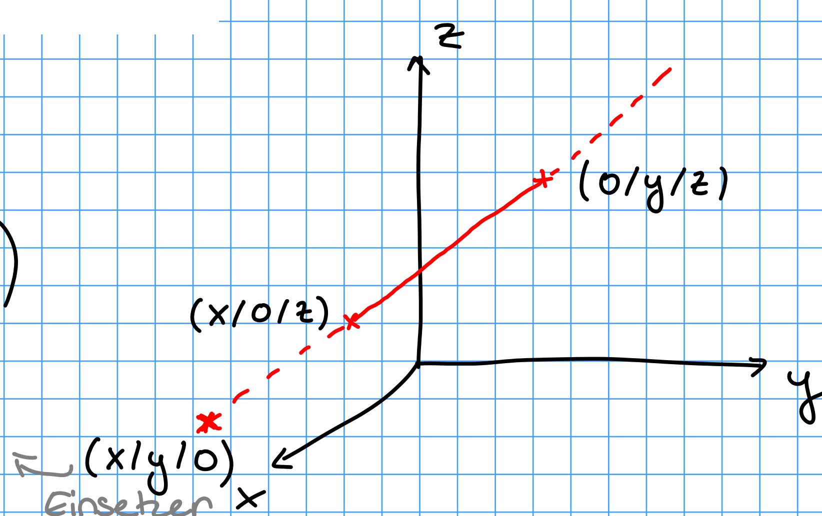
$sp:=g|s=\frac{-2}{3}$ → $\left[3\ \ \frac{1}{3}\ \ \frac{5}{3}\right]$

$m1+\frac{c-m1}{3}$ → $\left[3\ \ \frac{1}{3}\ \ \frac{5}{3}\right]$

Aufgabe 19

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4-3 \\ -1-1 \\ 9-6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$0 = 6 + 3s \quad | -3s$

$-3s = 6 \quad | :(-3)$

$s = -2$

$x = 3 + (-2) \cdot 1 = 1$

$y = 1 + (-2)(-2) = 5$

$S_{xy}(1/5/0)$

$r := [3-4 \quad 1+1 \quad 6-9] \qquad [-1 \quad 2 \quad -3]$

$\text{solve}([x \quad y \quad 0] = [3 \quad 1 \quad 6] + s \cdot r, \{s,x,y\})$

$s=2$ and $x=1$ and $y=5$

HA: A. 23