Lineare Algebra

Beni Keller

SJ 16/17

Matritzen

Einführendes Beispiel

Ein Betrieb braucht zur Herstellung von 5 Zwischenprodukten 4 verschiedene Rohstoffe und zwar in folgenden Mengen:

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5
R_1	1	2	1	0	1
R_2	1	0	4	2	0
R_3	3	1	1	0	0
R_4	0	2	0	1	2

Drei Endprodukte werden dann aus diesen Zwischenprodukten **und** den Rohstoffen nach folgenden Tabellen hergestellt:

	E_1	E_2	E_3
Z_1	2	0	1
Z_2	1	1	2
Z_3	0	3	1
Z_4	1	0	4
Z_5	0	1	0

	E_1	E_2
R_2	1	3
R_4	2	1

Wie viele Rohstoffe benötigt man zur Herstellung von 50 Einheiten von E_1, 200 Einheiten von E_2 und 100 Einheiten von E_3?

1. Erstelle eine Tabelle, aus welcher sich direkt die Anzahl Rohstoffe pro Endprodukt ablesen lässt.

2. Wie viele Rohstoffe benötigt man zur Herstellung von 50 Einheiten von E_1, 200 Einheiten von E_2 und 100 Einheiten von E_3?

Definition und Rechengesetze

Definition

Eine reelle $(m \times n)$-*Matrix* (Mehrzahl: *Matrizen*) ist eine rechteckig Anordnung (Tabelle) von Zahlen mit m Zeilen und n Spalten.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

mit $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ und $j \in \{1, \ldots n\}$. Wie bei einem Vektor heissen die einzelnen Elemente $a_{i,j}$ *Komponenten* der Matrix. Tatsächlich ist ein (Spalten-) Vektor eine $(m \times 1)$-Matrix.

Skalarmultiplikation

Gegeben seien eine $(m \times n)$-Matrix A und ein Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$. So ist die Skalarmultiplikation λA, jene Matrix, welche entsteht, wenn die einzelnen Komponenten von A mit λ multipliziert wird.

$$\lambda A := \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \lambda a_{1,2} & \cdots & \lambda a_{1,n} \\ \lambda a_{2,1} & \lambda a_{2,2} & \cdots & \lambda a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m,1} & \lambda a_{m,2} & \cdots & \lambda a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Addition

Gegeben seien zwei $(m \times n)$-Matrizen A und B. Wir definieren die Addition $A + B$ als jene Matrix, welche entsteht, wenn wir die entsprechenden Komponenten von A und B addieren.

$$A + B := \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & \cdots & a_{1,n} + b_{1,n} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & \cdots & a_{2,n} + b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} + b_{m,1} & a_{m,2} + b_{m,2} & \cdots & a_{m,n} + b_{m,n} \end{pmatrix}$$

Haben die beiden Matrizen nicht dieselbe Anzahl Spalten und Zeilen ist ihre Addition nicht möglich. Da die Addition von Matrizen über die Addition von reellen Zahlen definiert ist, ist es nicht schwer zu zeigen, dass die folgenden Rechengesetze gelten:

- Kommutativgesetz $A + B = B + A$.
- Distributivgesetz $\lambda A + \lambda B = \lambda(A + B)$.
- Assoziativgesetz $A + (B + C) = (A + B) + C$.

Transponierte Matrix

Die *transponierte Matrix* B einer Matrix A ist die Matrix mit den Komponenten $b_{i,j} := a_{j,i}$. Wir schreiben A^T für die transponierte Matrix von A. Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -9 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -4 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Man kann sich vorstellen, dass die Matrix beim Transponieren an der oben links beginnenden Diagonale gespiegelt wird. Daher ist diese Diagonale in der transponierten Matrix ist immer gleich der entsprechenden Diagonale in der ursprünglichen Matrix.

Multiplikation

Gegeben seien eine $(m \times n)$-Matrix A und eine $(n \times l)$-Matrix B. Das Produkt $C := A \cdot B$ der beiden Matrizen ist definiert durch

$$c_{i,j} := \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \cdot b_{k,j}$$

Das Produkt ist nur berechenbar, falls die Anzahl Spalten der ersten Matrix mit der Anzahl Zeilen der zweiten übereinstimmt. Das Ergebnis C ist eine $(m \times l)$-Matrix. Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 7 + 9 \cdot 6 & 3 \cdot 5 + 9 \cdot 1 \\ 4 \cdot 7 + 2 \cdot 6 & 4 \cdot 5 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 & 24 \\ 40 & 22 \end{pmatrix}$$

Spezielle Matrizen

Eine $(m \times n)$-Matrix heisst

- *Nullmatrix*, falls für alle Komponenten gilt $a_{i,j} = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- *quadratische Matrix*, falls $n = m$. Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -9 & 2 & 0 \\ 11 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

- $(n \times n)$-*Einheitsmatrix*, falls $a_{i,i} = 1$ und $a_{i,j} = 0$ für $i \leq j$. Wir bezeichnen die Einheitsmatrix mit E oder I_n. Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- *invertierbare Matrix*, falls eine Matrix A^{-1} existiert, so dass

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Jede invertierbare Matrix ist eine $(n \times n)$-Matrix, hat also dieselbe Anzahl Spalten und Zeilen.

Übungsaufgaben

1. Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Berechne wo möglich:

a) $A + B =$

b) $A^T + B =$

c) $3C =$

d) $2C + A =$

e) $C^T =$

f) $C \cdot A =$

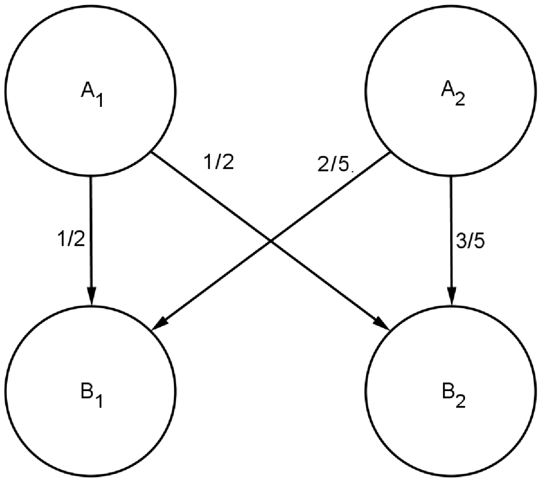
g) $A \cdot C =$

h) $C^T \cdot A =$

2. Wie kann man mit Hilfe der Matrizenrechnung das zu Beginn des Dossiers gestellte Problem lösen?

3. Du kennst die Gewinnbeziehungen im Spiel „Schere-Stein-Papier“. Stelle diese Beziehungen in einer (3×3)-Dominanzmatrix A dar. Dabei hat $a_{i,j}$ den Wert 1, falls das Objekt mit der Nummer i gegen das Objekt mit der Nummer j gewinnt, den Wert -1, wenn es umgekehrt ist und den Wert 0 für Unentschieden.

4. Bei einem Mischprozess wird der Inhalt der Behälter A_1 und A_2 im angegebenen Verhältnis in die Behälter B_1 und B_2 umgefüllt. Beschreibe den Mischprozess mit Hilfe einer Matrix.



5. Bei einem Mischprozess werden die Flüssigkeiten zweimal umgefüllt. Die einzelnen Mischungsverhältnisse sind der Skizze zu entnehmen. Wie kann der Übergang von A_1 , A_2 zu C_1, C_2 mit Hilfe einer Matrix dargestellt werden? Beschreibe dazu die Übergänge von A_1 , A_2 zu B_1 , B_2 und von B_1, B_2 zu C_1, C_2 zuerst einzeln mit je einer Matrix.