Lineare Algebra

Beni Keller (Vorlage: R. Schicker)

SJ 16/17

1 Übung: Lineare Abbildungen

Worum geht es?

- Du hast beim Einführungsbeispiel gelernt, wie zu einer *Abbildungsmatrix* gewisse Eigenschaften der Abbildung ermittelt werden können.
- Bei allen Aufgaben arbeiten wir mit den Punkten $A\,(-1|-3)$, $B\,(4|2)$, $C\,(1|11)$. DieBildpunkte bezeichnen wir mit A', B', C'.
- Der Ursprung heisst immer $O(0|0)$. Sein Bild ist O'.
- Du untersuchst lineare Abbildungen, in dem du das Bild des *Einheitsquadrates* (EQ) betrachtest.
- Du übst *Eigenwerte* (EW) und *Eigenvektoren* (EV) zu berechnen.
- Du wirst zu mit Worten beschriebenen Abbildungen die *Abbildungsmatrizen* herleiten. Dabei verinnerlichst du die Bedeutung der Spaltenvektoren.

1.1 Ein Abbildung zur gegebenen Matrix M untersuchen

Betrachte die Abbildung

$$\vec{p'} := M \cdot \vec{p} \quad \text{mit} \quad M := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Sprechen wir vom Bild P' eines Punktes wird der Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ mit der obigen Abbildungsvorschrift abgebildet.

a) Stelle EQ und EQ' im Koordinatensystem dar.

b) Betrachte das Dreieck ABC. Berechne den Flächeninhalt des Bilddreiecks $A'B'C'$.

c) Berechne die Eigenvektoren und die zugehörigen Eigenwerte von M.

1.2 Die Abbildungsmatrizen zu den Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen

Im ersten und in der dritten Schuljahr hast du die folgenden geometrischen Abbildungen kennen gelernt: *Geradenspiegelung*, *Punktspiegelung*, *Drehung*, *zentrische Streckung* und *Parallelverschiebung* (siehe nächste Aufgabe). Nun betrachten wir dieselben Abbildungen algebraisch. Erledige bei allen Teilaufgaben die folgenden Aufträge:

1. Stelle EQ und EQ' dar.
2. Gib die Abbildungsmatrix M an.
3. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks $A'B'C'$.
4. Bestimme die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von M.
5. Beschreibe die Umkehrabbildung in Worten und gib deren Abbildungsmatrix M^{-1} an.

a) Punktspiegelung an $O(0|0)$.

b) Zentrische Streckung mit Zentrum $O(0|0)$ und Faktor $k = 2$.

c) Drehung um $O(0|0)$ um Winkel $\alpha = 30°$.

d) Drehung um $O(0|0)$ um Winkel α.

e) Spiegelung an der x-Achse.

f) Spiegelung an der Geraden $y = x$.

g) Spiegelung an der Geraden $y = -x$.

h) *Zusatz*: Spiegelung an $y = mx$.

1.3 Die Abbildungsmatrizen einer zusammengesetzten Abbildung

Eine Abbildung in der Ebene ist folgendermassen definiert: Zuerst wird der Punkt P an der Gerade $y = x$ gespiegelt, dann wird P' um U um 60° gedreht und schliesslich wird P'' noch mit Faktor $k = 2$ von O aus gestreckt. So entsteht P'''.

Bestimme M so dass $\vec{p'''} = M \cdot \vec{p}$.

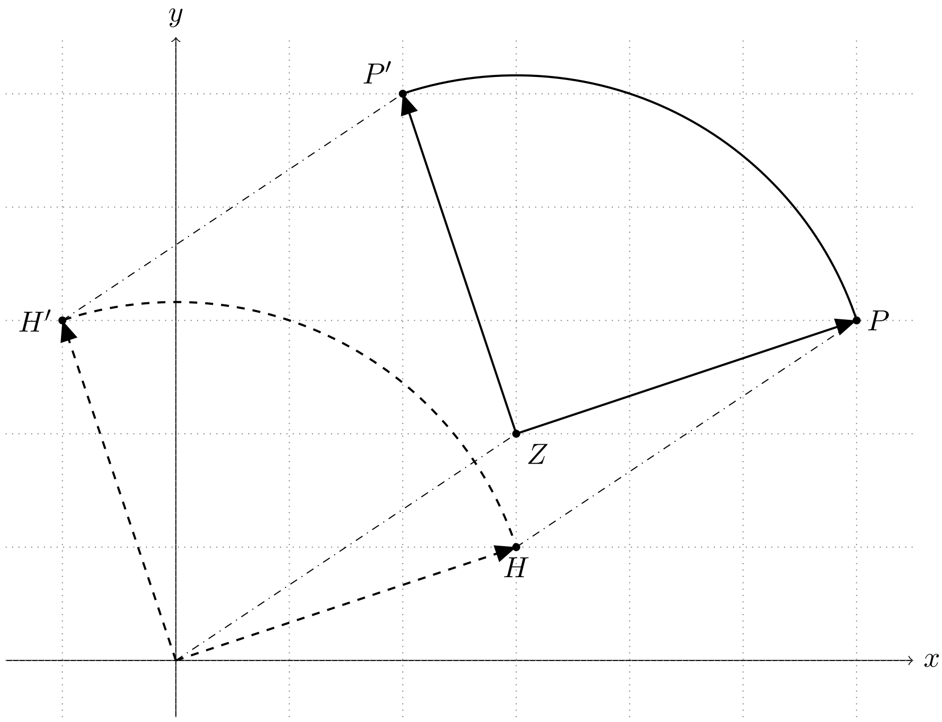
1.4 Eine Abbildung bei der O kein Fixpunkt ist

Bisher haben wir nur *lineare Abbildungen* untersucht. Bei all diesen Abbildungen war der Ursprung O ein Fixpunkt - das heisst, er wurde von der Abbildung auf sich selbst abgebildet. Parallelverschiebungen und Streckungen oder Drehungen mit einem Zentrum $Z \neq O$ können mit Gleichungen der Form

$$\vec{p'} := M \cdot \vec{p} + \vec{v}$$

beschrieben werden. Um M und $\vec{v}$ zu verstehen, musst du zuerst das folgende Musterbeispiel studieren:

Drehen um $Z(3|2)$ *mit* $\alpha = 90°$.



a) Erkläre, wie die Abbildung von P nach P' mit Hilfe von H und H' durchgeführt werden kann.

b) Erkläre die Gleichung $\vec{p'} = M \cdot (\vec{p} - \vec{z}) + \vec{z}$.

c) Finde M und $\vec{v}$ so dass $\vec{p'} = M \cdot \vec{p} + \vec{v}$.

1.5 Beispiele zu Abbildungen bei denen O kein Fixpunkt ist

Erledige bei allen Teilaufgaben die folgenden Aufträge:

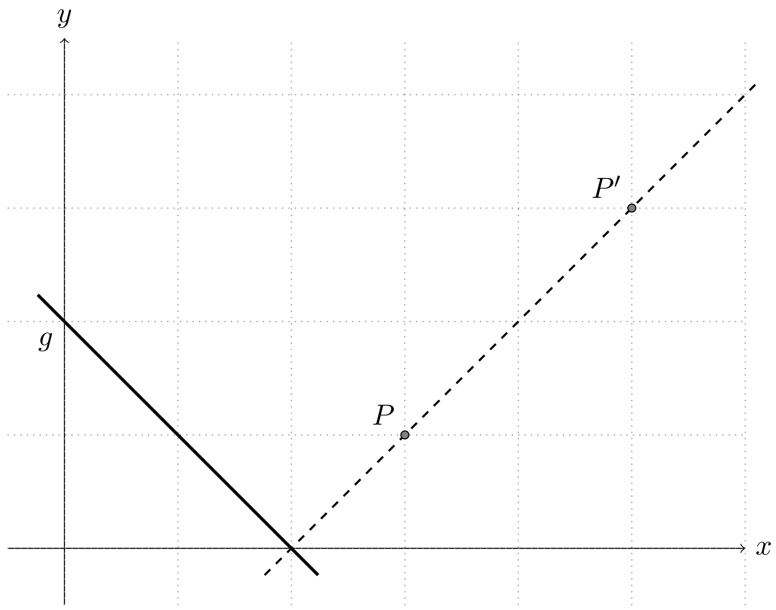
1. Gib die Abbildungsmatrix M an.
2. Überlege dir die Lage von U' (=Bildpunkt von U) und bestimme $\vec{v}$.
3. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks $A'B'C'$ mit $A\,(1|0)\,,\ B\,(3|3)\,,\ C\,(0|4)$.
4. Überprüfe die Gleichung $\vec{p'} = M \cdot \vec{p} + \vec{v}$ mit Hilfe eines beliebigen Punktes.

a) Spiegeln an $y = x + 1$.

b) Spiegeln an $Z(1|2)$.

c) Drehen um $Z(x_Z|y_Z)$ um α.

d) Streckung bezüglich der Fixgerade $g:\ y = 2 - x$. Die Streckrichtung ist senkrecht zur Fixgerade und der Streckfaktor ist 3 (siehe Skizze).


y
x
g
P
P′