Inhaltsverzeichnis

Ü1 Repetition

Worum geht es?

Mit diesem Übungsblatt sollen die folgenden Funktionsarten in Hinblick auf die lineare Regression repetiert werden:

- Lineare Funktion
- Quadratische Funktion
- Potenzfunktion
- Exponentialfunktion

Zusätzlich gibt es zwei Übungsaufgaben zum Summenzeichen $\sum$. Die Anwendung muss von Hand und mit dem grossen Taschenrechner beherrscht werden.

---

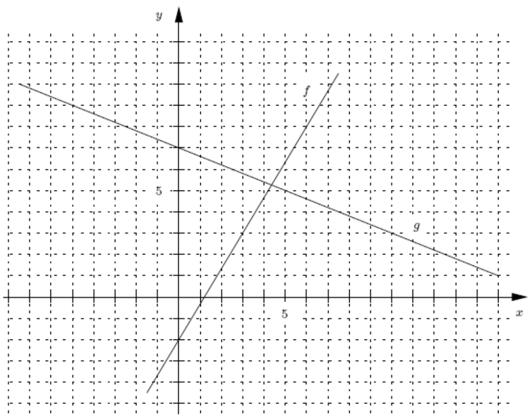
1. Lineare Funktion (Theorie)

a) Wie lautet die *Normalform* der Linearen Funktion? Welche Bedeutung haben dabei die einzelnen Parameter?

b) Wie lautet die *Punkt-Steigungs-Form* der Linearen Funktion?

2. Lineare Funktion (Anwendung)

a) Im untenstehenden Diagramm sind die Graphen der Funktionen f und g gezeichnet. Stelle die Gleichungen der beiden Funktionen auf.



b) Bestimme die Gleichung der Linearen Funktion deren Graph durch die Punkte $A(0|1)$ und $B(1|3)$ verläuft.

c) In einer Prüfung bekommst du für 30 Punkte die Note 6 und für 15 Punkte die Note 4. Welche Note erhältst du für 19 Punkte?

3. Quadratische Funktion (Theorie)

Eine allgemeine Quadratische Funktion besitzt die Funktionsgleichung

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c.$$

Dabei sind x, a, b, $c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.

a) Wie berechnet man die Nullstellen einer Quadratischen Funktion?

b) Wie lautet die Scheitelpunktform einer Quadratischen Funktion?

c) Wann hat eine Quadratische Funktion ein Maximum und wann ein Minimum?

4. Quadratische Funktion (Anwendung)

a) Der Scheitel $S(1|-2)$ ist gegeben und der Punkt $A(0|3)$ liegt auf der Parabel. Bestimme die Funktionsgleichung.

b) Die Parabel ist nach oben geöffnet und entsteht aus der Normalparabel durch Verschiebung um 2 nach rechts und 3 nach unten. Bestimme die Funktionsgleichung.

c) Bestimme die Scheitelpunktform der Funktion $f(x) = 3x^2 - 6x - 3$ und gib die Koordinaten des Scheitelpunkts $S(x_s|y_s)$ an.

d) Hat die Funktion $f(x) = -0.8x^2 + 0.2x + 4$ einen grössten (Maximum) oder einen kleinsten Funktionswert (Minimum)? Begründung!

Bestimme diesen Wert und gib an, für welches x sie ihn annimmt. In welchem Bereich der x-Werte steigt, in welchem fällt der Graph der Funktion?

5. Quadratische Funktion (Anwendung)

Die Fehmarnsbrücke verbindet die Insel Fehmarn mit dem deutschen Festland. Der Brückenbogen hat die Form einer Parabel. Technische Angaben:

Brückenlänge insgesamt	963.4 m
Scheitelhöhe des Bogens über dem Meeresspiegel	68 m
Durchfahrtshöhe für Schiffe	23 m
Spannweite des Bogens	248 m

Bestimme eine Funktionsgleichung, die den Brückenbogen beschreibt.

6. Potenzfunktion (Theorie)

Betrachte die Potenzfunktion $f_p(x) = x^p$ für $p \in \mathbb{R}$. Mit G_{f_p} bezeichnen wir ihren Graphen.

a) Beschreibe G_{f_p} in Abhängigkeit von p. Skizziere typische G_{f_p}.

b) Gib den maximalen Definitionsbereich und den Wertebereich in Abhängigkeit von p an.

Abbildung 1: Die Fehmarnsbrücke

7. Potenzfunktion (Anwendung)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = ax^{-\frac{3}{2}} + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.

a) Bestimme die Definitionsmenge $\mathbb{D}_f$ und die Wertemenge $\mathbb{W}_f$ der Funktion.

b) Bestimme a und b so, dass die Punkte $P(1|-1)$ und $Q(4|-2.75)$ auf G_f liegen.

Nun sei $f(x) = 2x^{-\frac{2}{3}} - 3$.

c) Zeichne G_f (Längeneinheit: 2 Häuschen oder 1cm).

d) G_f wird nun an der x-Achse gespiegelt. Wie lautet die Funktionsgleichung des gespiegelten Graphen?

8. Exponentialfunktion (Anwendung)

Die Temperaturentwicklung eines heissen Kaffees kann mit

$$T(t) = a\,b^t + c$$

beschrieben werden. Zur Zeit $t = 0$ sei der Kaffee $72°C$ warm, nach einer Minute messen wir eine Temperatur von $62°C$ und nach 2 Minuten noch $54°C$.

a) Bestimme a, b und c.

b) Wie warm ist es in dem Zimmer, in dem der Kaffee steht?

9. Summenzeichen

Schreibe mit dem Summenzeichen und berechne mit dem Taschenrechner:

a) Die Summe der geraden Zahlen von 2 bis 100.

b) Die Summe aller ungeraden Quadratzahlen von 121 bis und mit $2'401$.

Schreibe die folgenden Summen ausführlich hin und berechne sie.

c) $\sum_{k=1}^{3} (k - 2k)^2$

d) $\sum_{k=1}^{4} (y_k - f(k))$, wobei $y_1 = 2,\ y_2 = 5,\ y_3 = 7,\ y_4 = 9,\ f(k) = k + 1$

e) Schreibe ein Programm, welches die oben aufgeführten Summen berechnet. Wenn du Funktionen in Python schon kennst, kannst du eine Funktion schreiben, welche die Summe berechnet. Implementiere im untenstehenden Programm die fehlende Funktion:

```
# Eine mathematische Funktion für die Summe.
# Hier f(x) = x^2
def quadrat(x):
    return x**2

# Das Summenzeichen als Python-Funktion
def sigma(fkt, start, ende):
    ...

quadrat_summe = sigma(quadrat, 11, 49)
print(quadrat_summe)
```

Ü2 Regressionsgeraden

Worum geht es?

- Durch eine gegebene Menge von Punkten $(x_i|y_i)$ soll eine *optimale* Gerade gelegt werden. Du musst mit Hilfe einer Skizze erklären können, in welcher Hinsicht diese Gerade optimal ist.
- Du lernst wie die Gleichung einer solchen Geraden berechnet werden kann. Es ist wichtig, dass dir das mit und ohne GTR gelingt.
- Du kennst verschiedene Anwendungsbeispiele. Es geht dabei immer darum, dass man versucht einen *linearen Zusammenhang* zwischen zwei Merkmalen zu beschreiben. Diesen Zusammenhang setzt man ein um Prognosen oder Schätzungen zu machen.

---

1. Technisches Einführungsbeispiel

Gegeben sind die Punkte (4/2), (1/1), (2/1), (3/3), (6/2), (5/1) und (7|4).

a) Zeichne diese Punkte in ein Koordinatensystem ein. Verwende als Einheit 2 Häuschen.

b) Welchen Punkt würdest du berechnen, wenn du diese Punktwolke durch einen Punkt beschreiben müsstest? Anders ausgedrückt könnte man auch den "Mittelpunkt" der Punktwolke suchen. Berechne diesen Punkt M.

c) Die Gerade g soll *optimal* auf die Punktwolke passen. Zeichne g nach Augenmass durch den oben berechneten Punkt M. Zeichne ein Steigungsdreieck ein und schätze damit die Steigung m von g.

d) Wenn $f(x) = mx + q$ die Regressionsgerade durch die Punktewolke ist, so bezeichnen wir die Fehler in y-Richtung als *Residuen.* Es gilt

$$S\,(m) = \text{Summe aller Residuen}^2 = \text{Fehlerquadratsumme FQS}$$

Berechne mit Hilfe einer Tabelle die Steigung m so, dass die Fehlerquadratsumme *minimal* wird. Die Fehler heissen *Residuen.*

2. Bleikonzentration bei Mastschweinen

Schadstoffe im Futter von Nutztieren werden zum Teil in den Organen abgelagert. Bei einem Fütterungsversuch an Mastschweinen soll die Ablagerung eines Schadstoffs (Bleiacetat) aus Futtermitteln in der Nierenrinde untersucht werden.

Fragestellung Wie wirkt sich die Schadstoffkonzentration im Futter (Einflussgrösse x) aus auf jene in der Nierenrinde (Zielgrösse y)? Welcher Anteil des Schadstoffes im Futter gerät in die Nierenrinde?

Versuchsanlage Es wurden 13 gleich grosse Gruppen gleichaltriger Schweine gebildet. Dem Futter der verschiedenen Gruppen wurden unterschiedliche Mengen Bleiacetat beigemischt. Gruppenweise wurde der Mittelwert der Bleiacetatkonzentration in der Nierenrinde bestimmt.

Messdaten Die folgenden Grössen werden angegeben:

- i bezeichnet die Nummer der Gruppe;
- x_i: die Konzentration in Milligram (mg) Blei (Pb) pro Kilogramm (kg) Futter;
- y_i: Milligramm Blei pro Kilogramm Nierenrinde.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
x_i	2.0	2.3	2.4	2.6	2.9	3.2	3.8	4.5	5.4	6.9	8.9	11.8	15.8
y_i	0.12	0.14	0.18	0.14	0.20	0.18	0.20	0.24	0.42	0.55	0.61	0.74	1.02

a) Zeichne diese Punkte in ein Koordinatensystem ein. Berechne den Schwerpunkt der Messdaten.

b) Skizziere die Regressionsgerade und schätze deren Gleichung.

c) Berechne die Gleichung der Regressionsgeraden "von Hand" und vergleiche mit dem Ergebnis aus b.

d) Bestimme die Regressionsgerade mit Hilfe des GTR. Vergleiche mit dem Ergebnis aus *c*.

e) Wie gross wäre die Menge Blei pro Kilogramm Nierenrinde voraussichtlich, wenn im Futter 6 Milligramm Blei pro Kilogramm wären?

3. Rauchen und Lungenkrebs

In der untenstehenden Tabelle sind von verschiedenen Ländern die folgenden Daten zusammengetragen:

- x_i: Zigarettenverbrauch pro Kopf im Jahre 1930
- y_i: Anzahl der Todesfälle an Lungenkrebs pro Million Einwohner im Jahre 1950

Land	x_i	y_i
Island	230	60
Norwegen	250	90
Schweden	300	110
Dänemark	380	170
Australien	480	180
Holland	490	240
Kanada	500	150
Schweiz	510	250
Finnland	1100	350
England	1100	460
USA	1300	200

a) Zeichne diese Punkte in ein Koordinatensystem ein. Berechne den Schwerpunkt der Daten.

b) Skizziere die Regressionsgerade und schätze deren Gleichung.

c) Berechne die Gleichung der Regressionsgeraden “von Hand” und vergleiche mit dem Ergebnis aus b.

d) Bestimme die Regressionsgerade mit Hilfe des GTR. Vergleiche mit dem Ergebnis aus c.

e) *Zusatzaufgabe*: Schreibe ein Programm in Python, welches die Regressionsgerade berechnet.