Folgen und Reihen

Beni Keller

8. Mai 2017

In der Algebra und der Arithmetik wurden die Grundstrukturen und Rechenregeln für das Rechnen mit Zahlen in den ganzen, rationalen und reellen Zahlen festgelegt.
Wir begannen mit einfachen Grundstrukturen und Regeln und haben sie immer komplexer gemacht. Zu Beginn hatten wir die natürlichen Zahlen ($\mathbb{N}$), welche wir anschliessend um die negativen Zahlen zu den ganzen Zahlen ($\mathbb{Z}$) erweiterten. Da diese nicht ausreichten, um alles nötige zu berechnen, haben wir noch alle Brüche hinzugefügt und erhielten die rationalen Zahlen ($\mathbb{Q}$). Wir mussten aber feststellen, dass wir noch immer Zahlen finden, welche nicht in $\mathbb{Q}$ enthalten sind. So kann z.B. $\sqrt{2}$ oder π nicht als Bruch dargestellt werden. Daher haben wir die Zahlen noch einmal erweitert und erhielten so die reellen Zahlen ($\mathbb{R}$).[1] Wir sind also immer vom Einfachen zum Komplizierteren fortgeschritten.
In der *Analysis* verhält sich dies genau umgekehrt. Es werden vorhandene, komplexe Sachverhalte untersucht, um darin ein Muster oder einfachere Strukturen zu finden. Man geht in dem Sinne vom Komplizierten zum Einfacheren.
Eine besondere Rolle spielt in der Analysis das Unendliche, ein Konzept, welches die Menschen seit je her beschäftigt. Dabei kann es sich um eine Menge mit unendlich vielen Elementen, eine unendliche grosse Zahl oder auch eine unendlich kleine Menge handeln (ohne dass wir hier genau besprechen, was genau die "Grösse" einer Menge ist oder was "unendlich" eigentlich bedeutet).
Wir möchten vor allem reelle Funktionen genauer untersuchen. Das heisst Funktionen, welche reelle Zahlen wiederum auf reelle Zahlen abbilden[2]. Da diese eher komplex zu analysieren sind, beschränken wir uns aber vorerst auf Funktionen, welche natürliche Zahlen auf reelle Zahlen abbilden[3]. Eine solche Funktion nennen wir *Folge*.

Beispiel. Im 13. Jh. hat Leonardo von Pisa die nach ihm benannten [4] Fibonacci-Zahlen benutzt, um die Entwicklung von Kaninchenpopulationen zu beschreiben. Er ging von den folgenden Annahmen aus:

- Zu Beginn besteht unsere Population aus einem noch nicht geschlechtsreifen Hasenpaar.
- Es dauert immer einen Monat, bis ein Hasenpaar geschlechtsreif wird.
- Ein geschlechtsreifes Hasenpaar wirft in jedem Monat ein weiteres Hasenpaar.

Der Baum in Abbildung 1 zeigt auf, wie sich die Hasenpopulation entwickelt. Auf jeder Ebene sind alle Paare, welche in einem Monat existieren, aufgeführt.

[1] Auch in den reellen Zahlen ist nicht alles enthalten. Wir können $\sqrt{-1}$ nicht berechnen.
[2] In Zeichen schreibt man $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
[3] Hier schreiben wir analog: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$
[4] Sein Vater hiess Bonaci, daher wurde er in Latein auch "filius bonacii" genannt, woraus später Fibonacci wurde.

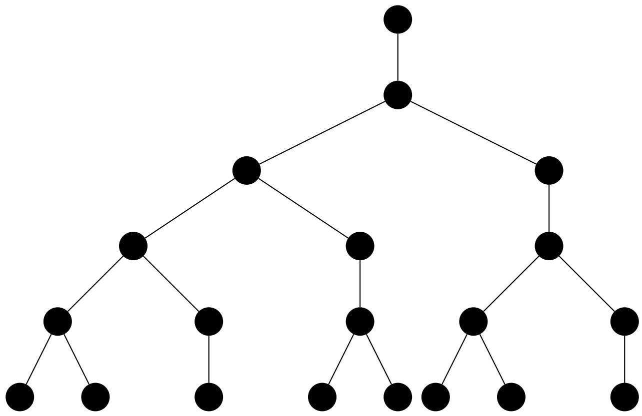


Abbildung 1: Entwicklung einer Hasenpopulation

Die Fibonaccifolge ist somit die Folge, bei der wir immer die letzten beiden Glieder zusammenzählen:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots)$$

Übung 1.
Führe die folgenden Zahlenfolgen fort und versuche eine Formel zur Berechnung der Folgenglieder zu finden. Formuliere die Regel zur Berechnung des nächsten Folgenglieds als deutschen Satz, sollte es dir nicht gelingen, eine Formel zu finden.

a) $1, 1, 1, 1, 1, \dots$

b) $1, 3, 5, 7, 9, \dots$

c) $2, 4, 8, 16, 32, \dots$

d) $1, -4, 9, -16, 25, \dots$

e) $1, 8, 27, 64, 125, \dots$

f) $-1, 1, -1, 1, -1, \dots$

g) $1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots$

h) $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots$

i) $9, 4, 1, 4, 9, 16, \dots$

1 Grundbegriffe

Definition 1.1. Eine Funktion, welche jede natürliche Zahl auf eine reelle abbildet, nennen wir *Folge*. Das heisst, wir können jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl zuordnen, welche wir mit a_n bezeichnen:

$$a : n \mapsto a_n$$

Wir benutzen nicht die für Funktionswerte übliche Schreibweise $a(n)$ und wir bezeichnen die Variable nicht wie üblich mit x, sondern mit n um darauf hinzuweisen, dass n eine natürliche Zahl ist. Dies verdeutlicht, dass wir die Funktionswerte nummerieren und in eine Liste schreiben können, wenn auch eine unendlich lange Liste.
Wir bezeichnen die einzelnen Werte $a_1, a_2, \dots$ als *Folgenglieder*. Das Glied a_n heisst das *n-te Glied* der Folge (a_n). Das Glied a_1 ist folglich das erste Glied der Folge (a_n). Wenn wir von der

gesamten Folge sprechen, schreiben wir wie oben (a_n). [5]
Geben wir eine Folge wie für Funktionen üblich mit einer von der Variable n abhängigen Funktionsgleichung an, so nennen wir dies eine *explizite Definition* einer Folge. Wichtig dabei ist, dass in der Funktionsgleichung nur die Variable n und weitere Konstanten vorkommen dürfen, auf keinen Fall aber andere Folgenglieder.

Beispiel. Die Folge $(1, 2, 3, 4, \dots)$ wird durch die Funktionsgleichung

$$a_n = n$$

definiert.
Die Folge $\left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots\right)$ kann mit der Gleichung

$$a_n = \frac{1}{n^2}$$

angegeben werden.

Eine andere Möglichkeit ist, dass wir eine Regel angeben, wie wir aus früheren Folgengliedern das aktuelle Glied berechnen können. Meistens wird das Glied a_n abhängig von seinem Vorgänger a_{n-1} angegeben. Für eine solche Definition ist es aber notwendig, dass wir auch die ersten Glieder – in dem Fall a_1 – explizit angeben. Diese Art, eine Folge zu definieren, wird *rekursive Definition* genannt.

Beispiel. Die oben besprochene Folge $(1, 2, 3, 4, \dots)$ kann durch $a_1 = 1$ und $a_n = a_{n-1} + 1$ rekursiv definiert werden.

Im Folgenden betrachten wir Summen von Folgengliedern. Dabei müssen wir oft viele Summanden aufschreiben. Wollen wir zum Beispiel die ersten 100 Glieder einer Folge aufschreiben, würde unser Term sehr lang oder wir müssen uns mit $\cdots$ behelfen:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}.$$

Um eine derartige Summe mathematisch präzise notieren zu können, wurde das Summenzeichen eingeführt:

Definition 1.2 (Summenzeichen)**.** Die Summe von n Summanden:

$$s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

schreiben wir

$$s = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Die Variable k wird *Laufvariable* genannt. Es handelt sich um eine *gebundene Variable*. Das heisst, sie hat nur innerhalb des Summenzeichens eine Bedeutung und kann ausserhalb nicht benutzt werden. Sie nimmt alle Werte von 1 bis n genau je einmal an. Dabei muss der Startwert einer Summe nicht unbedingt bei $k = 1$ liegen.

[5] Vollständigerweise schreibt man $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, um zu zeigen, dass n aus den natürlichen Zahlen ausgewählt werden darf.

Beispiel. Wollen wir die ersten 350 Folgenglieder der Folge $a_n = \frac{1}{n^2}$ aufsummieren, so schreiben wir

$$\sum_{k=1}^{350} \frac{1}{k^2}$$

anstelle von

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{350^2}$$

Bestehen die Folgenglieder selbst wieder aus Summanden, muss bei der Klammernsetzung darauf geachtet werden, dass klar ist, auf welche Terme sich die Summe bezieht. Wollen wir die ersten n Glieder der Folge $a_n = n^2 + 3^n$ aufsummieren, müssen wir Klammern setzen:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(k^2 + 3^k\right)$$

Bei Produkten sind die Klammern nicht nötig, da hier die übliche Operatorenpräzedenz (Punkt vor Strich) gilt.

Oft wollen wir von einer Folge (a_n) die Summe der ersten n Folgenglieder berechnen. Dies ergibt wiederum eine Folge (s_n), welche wir Reihe der Folge (a_n) nennen. Das erste Folgenglied der Reihe entspricht dem ersten Folgenglied der ursprünglichen Folge, es gilt demnach $a_1 = s_1$. Um das nächste Glied der Reihe zu berechnen, addieren wir das nächste Folgenglied der Folge (a_n), das heisst $s_n = s_{n-1} + a_n$.

Definition 1.3 (Reihe)**.** Die Folge (s_n), bei der ein Folgenglied s_n durch die Summe der ersten n Folgenglieder einer zugehörigen Folge (a_n) gebildet wird, nennen wir *Reihe der Folge* (a_n).
Das Glied s_n nennen wir n-te Teilsumme der Folge a und es gilt

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Übung 2.
Berechne die ersten fünf Folgenglieder der Folge:

a) $a_n = 2n^2 + 1$

b) $a_n = \dfrac{3n}{n+3}$

c) $a_n = 2^{n-2}$

d) $a_1 = 20$ und $a_n = a_{n-1} - 2$

e) $a_1 = 4$ und $a_n = -3a_{n-1}$

f) $a_1 = 0$ und $a_n = 3a_{n-1} + 3^n$

Übung 3.
Berechne die folgenden Summen von Hand und überprüfe das Ergebnis mit dem Taschenrechner.

a) $\sum_{k=1}^{5}(1+k)$

b) $\sum_{k=1}^{8}k\,(2k-7)$

c) $\sum_{k=1}^{5}(-2)^k$

d) $\sum_{k=1}^{10}\left(k^2-1\right)$

e) $\sum_{k=1}^{5}\left(2k+2^k\right)$

f) $\sum_{k=0}^{1000}\left(\frac{1}{2^k}\right)$

Übung 4.
Berechne die ersten fünf Folgenglieder der zur Folge (a_n) gehörenden Reihe (s_n). (Das heisst, du solltest $s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_5$ berechnen.)

a) $a_n = n$

b) $a_n = \frac{1}{n}$

c) $a_n = 2^n$

d) $a_1 = 20$ und $a_n = a_{n-1} + 4$

e) $a_1 = 4$ und $a_n = -2a_{n-1}$

f) $a_1 = 1$ und $a_n = a_{n-1} + n$

1.1 Montonie und Beschränktheit von Folgen

Falls in einer Folge a jedes Folgenglied grösser oder gleich seinem Vorgänger ist, nennen wir diese Folge *monoton wachsend*. Falls umgekehrt jedes Folgenglied jeweils kleiner oder gleich seinem Vorgänger ist, nennen wir die Folge *monoton fallend*.
Bleiben die Folgenglieder einer monoton wachsenden respektive fallenden Folge nicht gleich, so nennen wir diese Folge *streng monoton wachsend* respektive *streng monoton fallend*. Wir halten fest:

Definition 1.4. Eine Folge (a_n) heisst *monton wachsend* respektive *fallend*, falls für jedes n gilt, dass $a_n \leq a_{n+1}$ respektive $a_n \geq a_{n+1}$.
Eine monoton wachsende respektive fallende Folge a heisst *streng monton*, falls für jedes n gilt, dass $a_n < a_{n+1}$ respektive $a_n > a_{n+1}$.

Es gibt folgen, welche gewisse Werte nie unter- oder überschreiten. In diesem Fall sprechen wir von beschränkten Folgen:

Definition 1.5. Eine Folge (a_n) heisst nach oben respektive nach unten begrenzt, falls es eine Zahl a gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_n \geq a \quad \text{respektive} \quad a_n \leq a$$

Wir benutzen die folgenden Intervallschreibweisen um Grenzen anzugeben:

$$[a,b]\ := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}, \quad]a,b[:= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\},$$

$$[a,b[:= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}, \quad]a,b] := \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}.$$

Wir geben immer die kleinste obere respektive die grösste untere Grenze an.
Wir benutzen dabei die folgenden Begriffe:

Maximum Ein bestimmtes Folgenglied a_n, welches grösser oder gleich gross ist wie alle anderen Folgenglieder.

Minimum Ein bestimmtes Folgenglied a_n, welches kleiner oder gleich gross ist wie alle anderen Folgenglieder.

Supremum Die kleinste obere Grenze einer Folge. Dieser Wert wird von der folge nie überschritten.

Infimum Die grösste untere Grenze einer Folge. Dieser Wert wird von der Folge nie unterschritten.

Sollte eine Folge in eine Richtung keine Grenze besitzen, so schreiben wir $-\infty$ für negativ Unendlich und ∞ für positiv Unendlich.[6]

Übung 5.
Untersuche die Folge (a_n) auf Monotonie und Grenzen. Gib bei den Grenzen durch Intervallschreibweise an, ob sie erreicht werden oder nicht.

a) $a_n = 5n - 1$

b) $a_n = \frac{n}{3}$

c) $a_n = \frac{3}{n}$

d) $a_n = (-2)^n$

e) $a_n = \frac{n^2}{1-2n}$

f) $a_n = 4 + (-1)^n$

g) $a_n = \frac{n+1}{n}$

h) $a_n = \frac{n-1}{n}$

i) $a_n = 2^{-n}$

j) $a_n = \frac{n}{n+3}$

k) $a_n = 1 - (-2)^{-n}$

l) $a_n = \frac{3n+2}{n+1}$

m) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

n) $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$

[6] Achtung, dabei handelt es sich nicht um reelle Zahlen mit welchen gerechnet werden kann! Wir werden dies im Kapitel Grenzwerte genauer analysieren.

2 Arithmetische und geometrische Folgen

Im Folgenden werden wir zwei häufig benutzte Klassen von Folgen kennen lernen. Sie können benutzt werden, um Wachstumsprozesse zu beschreiben. Die erste Klasse von Folgen beschreibt lineares Wachstum.

Beispiel. Ein Elektrizitätswerk berechnet für den Anschluss eines Hauses an das Stromnetz einen Grundpreis von 50 CHF. Anschliessend wird jede Kilowattstunde zum Preis von 0.20 CHF verrechnet.
Diesen Vorgang können wir durch eine rekursiv definierte Folge einfach beschreiben. Hier macht es Sinn, die Folgenglieder ab der Zahl $n = 0$ zu nummerieren, da so n für die Anzahl verbrauchte Kilowattstunden steht.
Das erste Folgenglied entspricht im Betrag der Grundgebühr, wir halten fest: $a_0 = 50$. Anschliessend wird jedes folgende Glied durch Addition des Kilowattpreises berechnet. Somit sind unsere Kosten nach n Kilowattstunden auf $a_{n+1} = a_n + 0.20$ angestiegen.
Nun ist ein Elektrizitätswerk natürlich daran interessiert, auch eine explizite Berechnungsformel für die Kosten nach einer bestimmten Anzahl Kilowattstunden zu erhalten. Diese können wir einfach berechnen, denn nach n Kilowattstunden wurden die 20 Rappen n mal zum Grundpreis dazugezählt. Wir erhalten so die explizite Definition

$$a_n = 50 + 0.20n.$$

Eine solche Folge wird *arithmetische Folge* genannt.

Definition 2.1 (Arithmetische Folge)**.** Eine Folge, bei der das nächste Folgenglied berechnet wird, in dem zum vorangehenden Folgenglied ein konstanter Summand d addiert wird, heisst *arithmetische Folge*. Ihr Startwert a_1 kann beliebig festgelegt werden. Ein Rekursionsschritt wird mit

$$a_n = a_{n-1} + d$$

berechnet.
Wir bezeichnen eine arithmetische Folge kurz als *AF*.

Natürlich verhalten sich nicht alle Wachstumsprozesse wie die oben dargestellten Stromkosten, nämlich linear. Eine weitere wichtige Klasse von Wachstumsprozessen ist das exponentielle Wachstum.

Beispiel. Bei einer Bakterienkultur, welche sich unter optimalen Bedingungen fortpflanzen kann, wird oft die *Verdoppelungszeit* angegeben. Dies ist die Zeit, welche vergeht, bis sich die Anzahl Bakterien verdoppelt hat.
Wenn eine Bakterienkultur zu Beginn aus ca. 1500 Bakterien besteht und sich mit einer Verdoppelungszeit von 20 Minuten vermehrt, bedeutet dies, dass nach 20 Minuten 3000 Bakterien vorhanden sind, nach 40 Minuten 6000, nach 60 Minuten 12000 usw.
Wir können dies als Folge betrachten, in dem wir den Anfangsbestand als erstes Folgenglied $a_0 = 1500$ bezeichnen. Nun wird, um das nächste Folgenglied zu berechnen, immer mit dem Faktor $q = 2$ multipliziert. Rekursiv definiert können wir die Entwicklung der Population wie folgt beschreiben:

$$a_n = 2a_{n-1}.$$

Explizit müssten wir entsprechend n-mal mit q multiplizieren, also

$$a_n = 1500 \cdot 2^n.$$

Eine solche Folge wird *geometrische Folge* genannt.

Definition 2.2 (Geometrische Folge)**.** Eine Folge, bei der das nächste Folgenglied jeweils durch Multiplikation des vorangehenden mit einem konstanten Faktor q berechnet wird, heisst *geometrische Folge*. Ihr Startwert a_0 kann beliebig festgelegt werden. Ein Rekursionsschritt wird also mit

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

berechnet.
Wir bezeichnen eine geometrische Folge kurz als *GF*.

Sowohl für arithmetische sowie für geometrische Folgen kann eine explizite Formel hergeleitet werden. Die beiden Formeln sind auf den ersten Blick einsichtig. Will man sie aber mathematisch präzise beweisen, stellt sich dies nicht ganz einfach dar. Wir nutzen diese Gelegenheit, um einen ersten Induktionsbeweis durchzuführen. Für die explizite Darstellung der AF ist der Beweis ausgeführt. Für die GF bleibt er als Übung offen.

Satz 2.1 (Explizite Formel der AF)**.** *Eine arithmetische Folge mit Startwert a_0 und konstantem Summanden d kann mit*

$$a_n = a_0 + n \cdot d$$

explizit definiert werden. Beginnen wir mit a_1 anstelle von a_0, müssen wir entsprechend anpassen:

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Beweis. Der obenstehende Satz kann durch vollständige Induktion bewiesen werden. Vollständige Induktion wird typischerweise benutzt, wenn wir eine Aussage für eine Abfolge von Elementen zeigen wollen. Dafür wird zuerst bewiesen, dass die Aussage für das erste Element gilt (Induktionsanfang).
Anschliessend nimmt man an, dass die Aussage für ein Glied der Kette gilt (Induktionsannahme) und zeigt, dass daraus folgt, dass es auch für das folgende Glied gilt. So erhält man eine unendliche Kette von Beweisschritten, so dass die Aussage für die gesamte Kette bewiesen ist.
Induktionsanfang: Wir wollen zeigen, dass die oben genannte explizite Berechnung für Folgenglieder für das erste Glied, also a_0 gilt. Dies ist einfach einzusehen, denn für $n = 0$ gilt

$$a_0 = a_0 + 0d.$$

Induktionsannahme: Nun nehmen wir an, dass unsere Aussage für ein bestimmtes Glied a_n gilt. Wir nehmen an, die Aussage sei für a_{n-1} wahr. Dass heisst, dass $a_{n-1} = a_0 + (n-1)d$ gilt.
Induktionsschritt: Nun beweisen wir, dass mit dieser Annahme die genannte Berechnung auch für das nächste Folgenglied, also a_n gilt. Wir berechnen a_n nach Definition 2.1:

$$a_n = a_{n-1} + d$$

Gemäss Induktionsannahme kennen wir aber a_{n-1} und können es einsetzten:

$$a_n = a_0 + (n-1)d + d = a_0 + n \cdot d$$

□

Satz 2.2 (Explizite Formel der GF)**.** *Eine geometrische Folge mit Startwert a_0 und konstantem Faktor q kann mit*

$$a_n = a_0 \cdot q^n$$

explizit definiert werden. Beginnen wir mit a_1 anstelle von a_0, müssen wir entsprechend anpassen:

$$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}.$$

Beweis. Dieser Satz kann auch per Induktion bewiesen werden. Dies wird aber als Übung dem Leser überlassen. □

Aufgaben

a) Im Folgenden sind Folgenglieder einer Folge gegeben. Welche der Folgen können als GF oder als AF fortgeführt werden? Gib jeweils den zur Folge gehörenden Faktor (GF) oder den Summanden (AF) an.

   a) $a_1 = 3$, $a_2 = 7$, $a_{10} = 39$
   b) $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $a_5 = 48$
   c) $a_1 = 77$, $a_2 = 77$, $a_5 = 77$
   d) $a_1 = 1$, $a_3 = 4$, $a_7 = 64$
   e) $a_0 = 999$, $a_2 = 998$, $a_{999} = 0$
   f) $a_{10} = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{1}{96}$
   g) $a_0 = 1$, $a_3 = 8$, $a_{10} = 512$
   h) $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{1}{6}$

b) Berechne das erste Folgenglied der GF mit

   a) $a_3 = 48$, $a_5 = 75$
   b) $a_3 = 216$, $a_8 = \frac{71}{50}$

c) Gegeben sei eine AF (a_n) mit Differenz $d = 7$ und $a_{18} = 66$. Berechne die Summe s ohne Taschenrechner und überprüfe mit dem Taschenrechner. Findest du einen einfacheren Weg als alles zusammen zu zählen?

   a) $s = \sum_{k=2}^{18} a_k$
   b) $s = \sum_{k=32}^{312} a_k$

d) Gegeben sei eine GF mit $q = 2$ und $a_1 = 1$ Die folgende Summe lässt sich mit dem Taschenrechner gut berechnen. Findest du einen Weg um sie zu berechnen, ohne das Summenzeichen des Taschenrechners zu benutzen?

$$s = \sum_{k=1}^{100} a_k$$

(*Tipp*: Schreibe die Summe aus und ziehe $2s$ auf beiden Seiten ab. Benutze dabei auch die Formeln aus dem Theorieteil!)

3 Arithmetische und geometrische Reihen

In den Aufgaben des letzten Kapitels hast du festgestellt, dass es eher mühsam sein kann, die Summe von vielen Folgengliedern zu berechnen. In diesem Kapitel wollen wir nun systematisch Formeln für die Berechnung der Reihen von GF und AF herleiten.
In Aufgabe 3 haben wir Summen von arithmetischen Folgen berechnet. Um sich dabei nicht ewig zu beschäftigen, hat hoffentlich die Idee geholfen, das erste und das letzte Folgenglied zusammenzuzählen. Man stellt fest, dass dies die gleiche Summe gibt wie das zweitletzte und das zweite usw.
Wir werden die Summe der ersten n Folgenglieder einer Folge (a_n) berechnen, also s_n. Es gilt gemäss Satz 2.1, dass

$$\begin{aligned} a_1 + a_n &= a_1 + a_1 + (n-1)d = 2a_1 + (n-1)d \\ a_2 + a_{n-1} &= a_1 + d + a_1 + (n-2)d = 2a_1 + (n-1)d \\ a_3 + a_{n-2} &= a_1 + 2d + a_1 + (n-3)d = 2a_1 + (n-1)d \\ a_4 + a_{n-3} &= a_1 + 3d + a_1 + (n-4)d = 2a_1 + (n-1)d \\ \cdots &= \cdots \end{aligned}$$

Wir können $\frac{n}{2}$ solche Paare bilden. Dies führt uns zur folgenden Berechnungsformel für s_n:

Satz 3.1 (Arithmetische Reihe). *Die Glieder der arithmetischen Reihe s_n zu einer AF (a_n) mit Differenz d lassen sich wie folgt berechnen:*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right).$$

Das heisst, man addiert das erste und das letzte Folgenglied der Teilsumme und multipliziert es mit der Hälfte der Anzahl Summanden. Wenn wir die explizite Darstellung für arithmetische Folgen aus 2.1 benutzen, können wir auch sagen, dass

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)d\right).$$

Beweis. Wir haben den Satz in der Erklärung oben schon plausibel gemacht. Doch auch wenn die Formel einfach begründet werden kann, ist auch hier ein Beweis durch Induktion nötig, um es sauber mathematisch zu beweisen.
Induktionsanfang: Wir wollen zeigen, dass die oben genannte explizite Berechnung des ersten Folgenglieds der Reihe, also s_1 gilt. In diesem Fall ist einfach einzusehen, dass die zu beweisende Formel stimmt:

$$s_1 = \frac{1}{2}(a_1 + a_1) = \frac{1}{2} 2a_1 = a_1.$$

Induktionsannahme: Nun nehmen wir an, dass unsere Aussage für ein bestimmtes Glied gilt. Wir gehen davon aus, dass s_{n-1} berechnet werden kann durch

$$s_{n-1} = \frac{n-1}{2}(a_1 + a_{n-1}) = \frac{n-1}{2}(a_1 + a_1 + d(n-2)) = \frac{n-1}{2}(2a_1 + d(n-2))$$

Induktionsschritt: Daraus beweisen wir nun, dass die Formel auch für s_n gelten muss. Mit einigen Rechenschritten kommen wir auf das gewünschte Ergebnis:

$$\begin{aligned} s_n = s_{n-1} + a_n &= \frac{n-1}{2}(2a_1 + d(n-2)) + a_n = \frac{n-1}{2}(2a_1 + d(n-2)) + a_1 + d(n-1) \\ &= (n-1)a_1 + \frac{n-1}{2}d(n-2) + a_1 + d(n-1) = na_1 + d\left(\frac{n^2-3n+2}{2} + \frac{2n-2}{2}\right) \\ &= na_1 + d\left(\frac{n^2-n}{2}\right) = \frac{n}{2}\left(2a_1 + d\left(n-1\right)\right) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \end{aligned}$$

□

Auch für die Berechnung der Elemente der Reihe einer geometrischen Folge – also einer geometrischen Reihe – finden wir eine Formel für die Berechnung. Ihre Herleitung ist nicht so einfach einsichtig wie bei der arithmetischen Reihe, darum folgt sie erst nach der Formel im Beweis.

Satz 3.2 (Geometrische Reihe)**.** *Die n-te Teilsumme einer geometrischen Reihe (a_n) mit Faktor q kann durch*

$$s_n = \sum_1^n a_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

berechnet werden.

Beweis. Zum Beweisen dieses Satzes benutzen wir den Trick, dass wir einmal s_n notieren und davon qs_n abziehen. Dies führt dazu, dass viele Summanden der Summe wegfallen und wir eine einfache Gleichung erhalten.
Wir betrachten die folgenden zwei Zeilen:

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ qs_n &= qa_1 + qa_2 + qa_3 + \cdots + qa_n \end{aligned}$$

Da es sich um eine geometrische Folge mit Quotient q handelt, ist $qa_n = a_{n+1}$. Wir können die obenstehenden Zeilen also wie folgt umformulieren:

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n \\ qs_n &= \phantom{a_1 + {}} a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + a_{n+1} \end{aligned}$$

Wenn wir nun die beiden Gleichungen voneinander abziehen, erhalten wir

$$\begin{aligned} s_n - qs_n &= a_1 - a_{n+1} \\ s_n - qs_n &= a_1 - q^n a_1 \\ s_n(1-q) &= a_1(1-q^n) \end{aligned}$$

Lösen wir diese Gleichung auf s_n, so erhalten wir die gesuchte Formel.

$$s_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$\square$

Aufgaben

e) Berechne die gesuchten Grössen der GF (a_n).

   a) $a_1 = 1$, $q = 2$. Gesucht sind a_8 und s_8.

   b) $a_1 = 6$, $a_n = 13122$, $q = 3$. Gesucht sind n und s_n.

   c) $a_1 = 40$, $a_4 = -625$. Gesucht sind q und s_4.

   d) $s_{12} = 398\,580$, $q = -3$. Gesucht sind a_1 und a_{12}.

   e) $a_1 = 7$, $a_{10} = 3584$. Gesucht ist s_{15}.

   f) $a_1 = 2$, $q = 3$, $s_k = 177\,146$. Gesucht sind k und a_k.

f) Wie gross ist die Summe der ungeraden, vierstelligen Zahlen, welche durch 17 teilbar sind?

g) Bei einer GF beträgt die Summe des ersten und des dritten Folgengliedes -26, die Summe des zweiten und des vierten Gliedes 39. Welchen Wert haben die genannten Folgenglieder?

h) Wie viele Schläge macht eine Uhr in 24 Stunden, wenn sie immer die vollen Stunden schlägt?

i) Ein Stein fällt im freien Fall in der ersten Sekunde 4.9 m. In jeder folgenden Sekunde legt er 9.8m mehr zurück als in der vorhergehenden. Berechne die Fallstrecke in der 10. Sekunde und den zurückgelegten Weg nach 10 Sekunden.

j) Ein Kapital von 5000 CHF wird mit einem Jahreszins von p Prozent angelegt.

   a) Wie gross ist das Kapital nach 10 Jahren, wenn $p = 5$ ist?

   b) Wie gross muss p gewählt werden, damit sich das Kapital in 10 Jahren verdoppelt?

k) Die folgenden Flächen beschreiben einen schrittweisen Prozess, welcher ein Beispiel dessen ist, was in der Analysis untersucht wird. Später werden wir uns besonders dafür interessieren, was passiert, wenn wir den Prozess unendlich weiter führen.

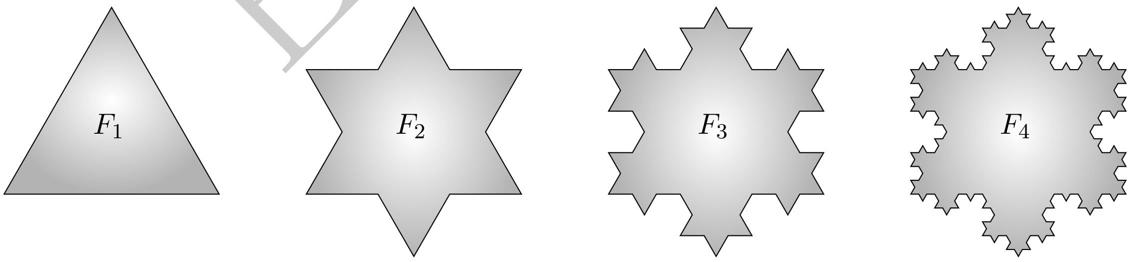


Abbildung 2: Schneeflocken

Betrachte die Figuren $F_1, \ldots, F_4$ in Abbildung 2. Es handelt sich immer um gleichseitige Dreiecke. Das erste Dreieck hat Seitenlänge 1. Danach wird für die kleinen Dreiecke, welche angehängt werden, die Seitenlänge jeweils durch drei geteilt.

a) Fülle die folgende Tabelle aus. Versuche dabei in der letzten Zeile jeweils eine allgemeine Formel zu finden.

Figur	Anzahl Seiten	Seitenlänge	Umfang (U_n)	Fläche (A_n)
F_1				
F_2				
F_3				
F_4				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
F_n				

b) Stelle eine Vermutung auf, wie sich die Fläche entwickelt, wenn wir den beschriebenen Prozess unendlich weiter führen.

c) Stelle eine Vermutung auf, wie sich der Umfang entwickelt, wenn wir den beschriebenen Prozess weiter führen.

d) Welche Probleme sind beim Aufstellen der allgemein gültigen Formeln aufgetreten?

4 Grenzwerte

Wie schon in früheren Kapiteln erwähnt, interessieren wir uns dafür, was mit Folgen geschieht, wenn wir sie unendlich weit fortführen. Um dies genauer zu beschreiben, benötigen wir vorerst neue Begriffe, um dieses Verhalten zu beschreiben.
Wir unterscheiden *konvergente* und *divergente* Folgen. Konvergente Folgen nähern sich für grösser werdende Indices n immer mehr an einen bestimmten Wert an. Ein Beispiel dafür hast du in Aufgabe 11 entdeckt: Egal wie weit wir die Schneeflocke weiter zeichnen, ihre Fläche ist beschränkt und nähert sich immer mehr einem bestimmten Wert an.
Ist eine Folge nicht konvergent, so nennen wir sie divergent. Um divergente Folgen genauer beschreiben zu können, führen wir eine neue Schreibweise ein.
Wenn wir eine arithmetische Folge mit einer positiven Differenz d unendlich fortführen würden, können wir keine obere Grenze festlegen. Egal wie gross wir eine Grenze wählen, die Folgenglieder werden für genug grosse n grösser als unsere Grenze. Diese Eigenschaft einer Folge nennen wir *Divergenz*. Wir sagen, dass die Folge gegen "Unendlich" strebt.
Wählen wir hingegen ein negatives d, werden die Folgenglieder unendlich klein. Wir können keine untere Grenze festlegen. Auch dies ist ein Fall von *Divergenz* und wir sprechen davon, dass die Folge gegen "minus Unendlich" strebt.
Um Unendlichkeit auch in Formeln ausdrücken zu können, definieren wir das Unendlich-Zeichen. Wir schreiben:

Zeichen	Bedeutung
∞	Unendlich
$-\infty$	minus Unendlich

Die neu eingeführten Zeichen haben die folgenden Eigenschaften:

- ∞ ist grösser als jede beliebige reelle Zahl. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $x < \infty$.
- $-\infty$ ist kleiner als jede beliebige reelle Zahl. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $x > -\infty$.
- "Unendlich" ist keine Zahl. Das heisst, dass ∞ oder $-\infty$ weder addiert noch subtrahiert werden kann. Auch durch ∞ zu dividieren oder damit zu multiplizieren hat keine sinnvolle Bedeutung.

Nun wollen wir den Grenzwert einer Folge präzise definieren. Anschliessend werden wir ein Beispiel dafür betrachten.

Definition 4.1 (Grenzwert)**.** Eine Folge (a_n) besitzt den Grenzwert a, falls es für jede noch so kleine reelle Zahl $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl n_ε gibt, so dass für alle $n \geq n_\varepsilon$

$$|a - a_n| < \varepsilon$$

Wir schreiben

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Eine Folge, welche einen Grenzwert besitzt, nennen wir *konvergent.*

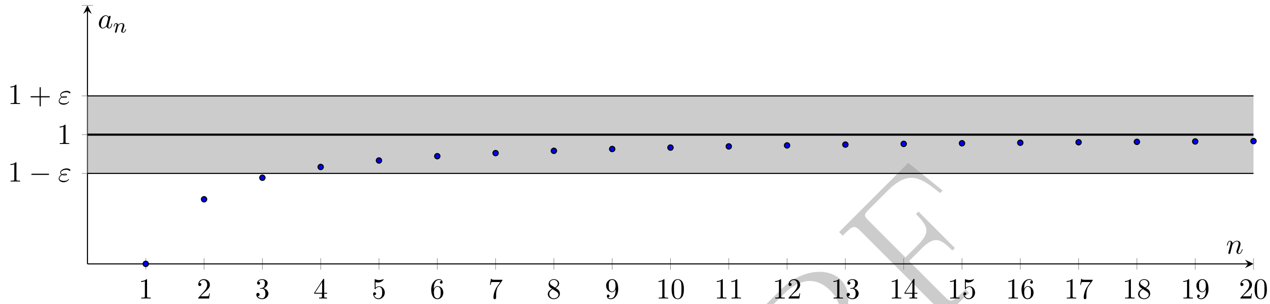
Diese Definition wird verständlicher, wenn man sie an einem Beispiel erklärt. Betrachten wir zum Beispiel die Folge

$$a_n = 1 + \frac{1}{n}.$$

Wir stellen fest, dass wenn wir grosse Zahlen für n einsetzen, geht a_n immer näher zu eins. Es ist also naheliegend anzunehmen, dass der Grenzwert der Folge (a_n) eins ist. In Zeichen gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Stellen wir die Folgenglieder in einem Koordinatensystem dar, so sieht dies wie folgt aus:



In diesem Fall wurde $\varepsilon = 0.3$ gewählt. Wir sehen, dass alle Folgenglieder ab $n = 4$ im markierten Balken zwischen 0.7 und 1.3 liegen. Das heisst in diesem Fall gilt $|a_n - 1| < 0.3$ für alle $n \geq 4$. Wählen wir nun ε kleiner wird der markierte Balken schmaler und das n verschiebt sich nach rechts. Egal wie schmal wir diesen Balken wählen, ab einem bestimmten n werden immer alle Folgenglieder im Balken liegen.

4.1 Grenzwerte von geometrischen Folgen und Reihen

Es wird schnell klar, dass eine arithmetische Folge mit $d \neq 0$ keinen Grenzwert besitzt. Für $d > 0$ geht sie gegen ∞ und falls $d < 0$ ist gegen $-\infty$. Aus diesem Grund betrachten wir nur Grenzwerte von geometrischen Folgen und ihren Reihen.
Als erstes möchten wir festhalten, für welche Quotienten q geometrische Folgen konvergieren. Anschliessend betrachten wir den Grenzwert der dazugehörenden Reihe, was – wie wir sehen werden – einiges spannender ist.

Satz 4.1 (Konvergenz von GF)**.** *Eine geometrische Folge (a_n) konvergiert genau dann, wenn für ihren Quotient q gilt, dass $-1 < q \leq 1$. Für $|q| < 1$ ist ihr Grenzwert gleich 0. Das heisst es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Im Spezialfall $q = 1$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a_1,$$

da alle Folgenglieder gleich a_1 sind.

Beweis. Dieser Satz ist intuitiv gut verständlich. Aus diesem Grund lassen wir einen präzisen, mathematischen Beweis weg.

$\square$

5 Lösungen

Lösung 2.

a) $3, 9, 19, 33, 51$

b) $\frac{3}{4}, \frac{6}{5}, \frac{3}{2}, \frac{12}{7}, \frac{15}{8}$

c) $\frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8$

d) $20, 18, 16, 14, 12$

e) $4, -12, 36, -108, 324$

f) $0, 9, 54, 243, 972$

Lösung 3.

a) 20

b) 156

c) -22

d) 375

e) 92

f) ≈ 2

Lösung 4.

a) $1, 3, 6, 10, 15$

b) $1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \frac{25}{12}, \frac{137}{60}$

c) $2, 6, 14, 30, 62$

d) $20, 44, 72, 104, 140$

e) $4, -4, 12, -20, 44$

f) $1, 4, 10, 20, 35$

Lösung 5.

a) monoton steigend, $[4, \infty[$,

b) monoton steigend, $\left[\frac{1}{3}, \infty\right[$,

c) monoton fallend, $]-\infty, \infty[$,

d) alternierend, $]-\infty, \infty[$,

e) monoton fallend, $]-\infty, -1]$,

f) keine Monotonie, $[3, 5]$,

g) monoton fallend, $[0, 1[$,

h) monoton fallend, $\left]0, \frac{1}{2}\right]$,

i) monoton steigend, $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$,

j) keine Monotonie, $\left[\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right]$,

k) monoton steigend, $\left[\frac{5}{2}, 3\right[$.