Übersicht Analysis

Beni Keller

SJ 16/17

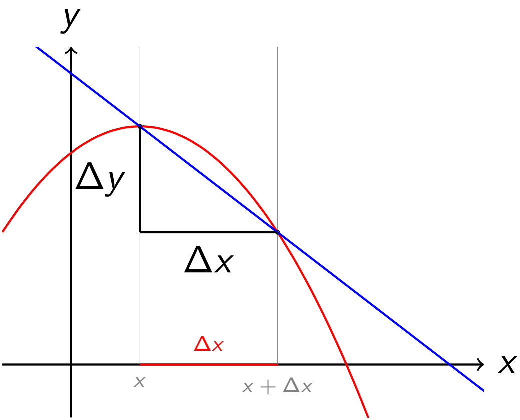
Themenübersicht

- ~~Folgen und Reihen~~
  - ~~Aritmetische Folgen~~
  - ~~Geometrische Folgen~~
- **Differenzialrechnung**
- **Integralrechnung**

Differenzialrechnung

Differenzialquotient

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



Steigung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ mit unendlich kleinem Δx.

Ableitungsregeln

Potenzregel

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Faktorregel

$$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)$$

Summenregel

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

Beispiel

$$\left(3x^4 - 2x^2 + 7x + 1\right)' = 12x^3 - 4x + 7$$

Hinweis

$$(k)' = \left(k \cdot x^0\right)' = k \cdot 0 \cdot x^{-1} = 0$$

Produktregel

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Quotientenregel

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Kettenregel

$$(v\,(u(x)))' = v'\,(u(x)) \cdot u'(x)$$

Äussere Ableitung mal innnere Ableitung

Spezielle Ableitungen

$$
\begin{aligned}
\sin(x)' &= \cos(x) \\
\cos(x)' &= -\sin(x) \\
\ln(x)' &= \frac{1}{x} \\
(e^x)' &= e^x \\
(a^x)' &= \ln(a)a^x
\end{aligned}
$$

Anwendungen

- Kurvendiskussion
- Tangenten bestimmen
- Parameter einer Kurvenschar bestimmen
- Extremalwert-Probleme
- **Physikalische Anwendungen bei Divisionen**

Integralrechnung

Riemannsummen

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

- Annäherung der *Flächenbilanz* unter dem Graphen
- x_i ist eine Stelle auf dem i-ten *Teilintervall*
  - Obersumme: Bei x_i grösster Funktionswert $f(x_1)$.
  - Untersumme: Bei x_i kleinster Funktionswert.
- Wir wählen grundsätzlich $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

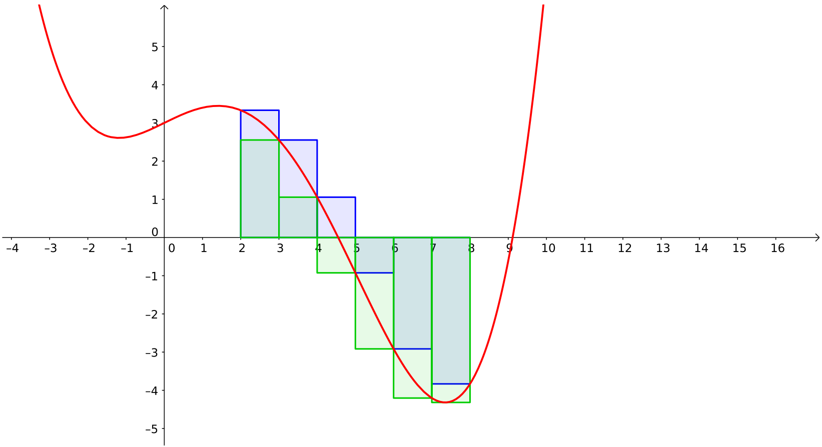


Figure 1: Riemannsumme

Bestimmtes Integral

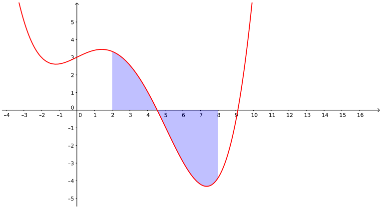


Figure 2: Bestimmtes Integral

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

Unbestimmtes Integral

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

Menge aller Stammfunktionen einer Funktion $f(x)$

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Bringt unbestimmte und bestimmte Integrale zusammen

Beispiel

$$
\begin{aligned}
\int_0^6 x^2 \,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{3}x^3 + C\right]_0^6 \\
&= \frac{1}{3} \cdot 6^3 + C - \left(\frac{1}{3} \cdot 0^3 + C\right) \\
&= 72
\end{aligned}
$$

Integrationsregeln

$$\int \left(f(x) + g(x)\right)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int \left(a \cdot f(x)\right)\,\mathrm{d}x = a \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}$$

Anwendungen

Funktionsgraphen

- Fläche zwischen zwei Kurven
- Rotationsvolumen bei Rotation um die x- und die y-Achse
- Mittelwert von Funktionswerten
- Länge eines Funktionsgraphen-Abschnittes

Allgemein

- Physikalische Anwendungen bei Produkten
- Berechnung von Volumen
- *Uneigentliche* Integrale