Stochastik

Beni Keller

Schuljahr 2016/17

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung 3
- 1.1 Ein historisches Beispiel . . . 3
- 1.2 Grundbegriffe . . . 3
- 1.3 Laplace-Versuche . . . 6
- 1.4 Mehrstufige Zufallsversuche . . . 8
- 1.5 Kombinatorik . . . 15
- 1.6 Bedingte Wahrscheinlichkeit und unabhängige Ereignisse . . . 24
- 1.7 Lösungen zu den Übungen . . . 29

2 Zufallsgrössen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen 37
- 2.1 Erwartungswert und Standardabweichung . . . 41
- 2.2 Bernoulliversuche und die Binomialverteilung . . . 47
- 2.3 Die Normalverteilung . . . 55
- 2.4 Lösungen zu den Übungen . . . 58

3 Hypothesentests 65
- 3.1 Durchführen eines Hypothesentests . . . 67
- 3.2 Annahme- und Verwerfungsbereich . . . 68
- 3.3 Lösungen zu den Übungen . . . 73

1 Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung

1.1 Ein historisches Beispiel

Im 17. Jahrhundert verdiente Chevalier de Méré sein Lebensunterhalt mit Würfelspielen. Er bot ein Spiel an, in welchem ein fairer Würfel viermal gewürfelt wurde. Er gewann das Spiel, wenn mindestens einmal eine Sechs gewürfelt wurde.

Um das Spiel spannend zu halten, passte er das Spiel an und hat es auf zwei Würfel erweitert. Diese warf man 24 mal. Dieses Spiel gewann er, wenn jemand mindestes eine Doppelsechs würfelte.

Er musste feststellen, dass er mit dem neuen Spiel begann, Geld zu verlieren. Warum?

1.2 Grundbegriffe

Lernziele

- Du definierst die Begriffe *Zufallsversuch*, *Ergebnis*, *Ergebnisraum* und *Ereignis*. Insbesondere grenzt du Ergebnisse klar von Ereignissen abgrenzen.
- Du erklärst, was ein *Elementar*- und ein *Gegenereignis* ist.
- Du verstehst die Bedeutung von *Wahrscheinlichkeiten* und gibst sie sowohl als absoluten Wert sowie als Prozentzahl an.
- Du verwendest in Berechnungen die *Additivität* und die allgemeine Summenregel (Satz 1.1).
- Du berechnest Wahrscheinlichkeiten über ihre Gegenwahrscheinlichkeit (Satz 1.2)

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung befasst sich mit zufälligen Ereignissen. Ein zufälliges Ereignis bezeichnet in diesem Fall die Folge eines Vorgangs, dessen Ausgang aus verschiedenen Gründen nicht vorhergesagt werden kann. Einen solchen Vorgang bezeichnen wir als *Zufallsexperiment.* Genauer ist ein Zufallsexperiment ein Vorgang mit folgenden Eigenschaften:

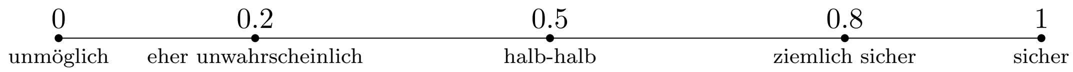
i) Der Vorgang wird nach bestimmten, reproduzierbaren Vorschriften ausgeführt.

ii) Alle möglichen Ergebnisse des Versuchs sind zu Beginn bekannt.

iii) Der Ausgang des Vorgangs kann nicht vorausgesagt werden.

iv) Der Ausgang eines bestimmten Versuchs ist bei mehrfachem Durchführen jeweils von den vorhergeheneden Versuchen unabhängig.

Wir ordnen jedem möglichen Ausgang des Zufallsversuchs eine Wahrscheinlichkeit zu. Eine Wahrscheinlichkeit ist eine Zahl zwischen 0 und 1. Sie wird teilweise auch als Prozentzahl zwischen 0% und 100% angegeben. Dabei bedeutet 0, dass dieser Ausgang für das Experiment unmöglich ist und 1, dass dieser Ausgang sicher ist.



Einen einzelnen Ausgang eines Zufallsversuchs nennen wir *Ergebnis*. Die Menge aller Ergebnisse bezeichnen wir als *Ergebnisraum*.

Definition 1.1. Die Menge alle möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments bezeichnen wir als **Ergebnisraum** und bezeichnen sie mit Ω.

Beispiele für Zufallsversuche mit dem entsprechenden Ergebnisraum sind:

- Werfen eines Würfels $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
- Ziehen einer Jass-Karte $\Omega = \{\text{Rosen 6}, \text{Rosen 7}, \ldots, \text{Schilten As}\}$;
- Werfen einer Münze $\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$;
- Wählen einer zufälligen Person aus einer Gruppe $\Omega = \{\text{Max}, \text{Jakob}, \text{Anne}, \text{Gudrun}, \ldots\}$.

Die einzelnen Elemente der Menge Ω bezeichen wir mit $\omega_1, \omega_2, \ldots$ oder wenn wir von einem einzelnen Ergebnis sprechen nur mit ω.

Definition 1.2. Ein **Ereignis** E ist eine Teilmenge von Ω oder anders gesagt gilt $E \subseteq \Omega$.

E darf auch leer sein oder den gesamten Ergebnisraum umfassen.

In den oben genannnten Beispielen für Ergebnisräume sind dies Beispiele für Ereignisse:

- "Ein Würfel zeigt eine gerade Zahl" $E = \{2, 4, 6\}$
- "Die gezogene Jasskarte ist ein As" $E = \{\text{Rosen As}, \text{Eichel As}, \text{Schilten As}, \text{Schellen As}\}$
- "Die Münze zeigt weder Kopf noch Zahl" $E = \{\}$
- "Die zufällige Person ist ein Mann" $E = \{\text{Max}, \text{Jakob}, \ldots\}$

Im Fall, dass E den gesamten Ergebnisraum umfasst, sprechen wir vom *sicheren Ereignis* ($E = \Omega$). Es hat die Wahrscheinlichkeit 1. Falls E die leere Menge ist ($E = \{\}$), nennen wir E das unmögliche Ereignis mit der Wahrscheinlichkeit 0. Ein Ereignis, welches nur ein einzelnes Ergebnis ω enthält, nennen wir *Elementarereignis*.

Die Komplementärmenge $\Omega \setminus E$ (lies "Ω ohne E"), bezeichnen wir mit $\overline{E}$ und nennen es das *Gegenereignis* von E. Tritt bei einem Zufallsversuch das Ergebnis ω ein, gilt immer entweder $\omega \in E$ oder $\omega \in \overline{E}$.

Es seien E_1 und E_2 zwei Ereignisse. Falls ein Ergebnis ω in der Schnittmenge $E_1 \cap E_2$ liegt, so sind E_1 *und* E_2 eingetroffen.

Liegt ein Ergebnis ω in der Vereinigungsmenge $E_1 \cup E_2$, so ist E_1 *oder* E_2 eingetroffen.

Sind zwei Ereignisse disjunkt (d.h. $E_1 \cap E_2 = \{\}$), so nennen wir sie *unvereinbar.*

Für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E schreiben wir $P(E)$. Falls es sich bei E um ein Elementarereignis handelt mit $E = \{\omega\}$, so schreiben wir nur $P(\omega)$ und lassen die Mengenklammern weg.

Was uns nun noch fehlt, sind Regeln, mit welchen wir den Ereignissen eine Wahrscheinlichkeit zuordnen können. Der russische Mathematiker Kolmogorow hat die folgenden Axiome für Wahrscheinlichkeiten gefordert:

1. Axiom Für jedes Ereignis $E \subseteq \Omega$ gilt $0 \leq P(E) \leq 1$. (*Nichtnegativität*)

2. Axiom Es ist $P(\{\}) = 0$ und $P(\Omega) = 1$. (*Normierung*)

3. Axiom Sind zwei Ereignisse E_1 und E_2 unvereinbar, so gilt $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$. (*Additivität*).

Dabei gilt zu beachten, dass das Axiom 3 für vereinbare Ereignisse nicht gültig ist. In diesem Fall gilt der folgende Satz:]

Satz 1.1. *Für zwei Ereignisse E_1 und E_2 gilt:*

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

Dies wird am einfachsten an einem Venn-Diagramm veranschaulicht. Siehe dazu Aufgabe 1.

Aus der Additivität und der Normierung folgt auch die *Komplementärregel* für Gegenwahrscheinlichkeiten.

Satz 1.2. *Für ein Ereignis $E \subseteq \Omega$ und das dazugehörige Gegenereignis $\overline{E}$ gilt*

$$P(E) + P(\overline{E}) = 1$$

Beweis. Auf Grund der Definition des Gegenereignisses ist klar, dass E und $\overline{E}$ unvereinbar sein müssen. Es darf also die geforderte Additivität angewandt werden:

$$P(E) + P(\overline{E}) = P(E \cup \overline{E}) = P(\Omega)$$

Gemäss der geforderten Normierung ist aber $P(\Omega) = 1$. □

Übung 1.
Zeige an Hand eines Venn-Diagramms, dass die folgenden Aussagen korrekt sind:

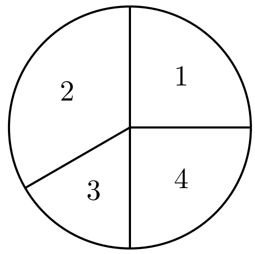
a) Wenn $A \cap B = A$, so ist $A \subseteq B$.

b) Wenn $A \cup B = A$, so ist $B \subseteq A$.

c) $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$.

Übung 2.
Vereinfache: $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.

Übung 3.
Gegeben sei ein Glücksrad mit Sektoren, deren Innenwinkel 60°, 90° und 120° betragen (siehe Skizze). Unser Zufallsexperiment besteht aus einmaligem Drehen am Rad.



a) Bestimme Ω und die zu jedem Ergebnis ω gehörende Wahrscheinlichkeit.

b) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl grösser als 2 erscheint?

c) Was ist die Wahrscheinlichkeit der Ereignisses $E = \{1, 4\}$?

1.3 Laplace-Versuche

Lernziele

- Du erkennst, ob die Wahrschinlichkeiten der Ergebnisse eines Zufallsversuchs gleich sind und berechnest in diesem Falle die Wahrscheinlichkeit mit der Laplace-Regel (Satz 1.3).

Im diesem Kapitel betrachen wir den einfacheren Spezialfall, in welchem jedes *Elementarereignis* dieselbe Wahrscheinlichkeit hat.

Definition 1.3. Ein *Laplace-Versuch* ist ein Zufallsversuch mit einem Ergebnisraum Ω, in welchem die Wahrscheinlichkeit $P(\omega)$ für alle Ergebnisse $\omega \in \Omega$ gleich ist.

In diesem Fall lässt sich die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis E einfach berechnen.

Satz 1.3. *Sei $E \subseteq \Omega$ ein Ereignis in einem Laplace-Versuch. So gilt*

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{\textit{Anzahl günstige Ergebnisse}}{\textit{Anzahl mögliche Ergebnisse}}$$

Bei Mengen bezeichnen dabei Betragsstriche $| \bullet |$ die Anzahl Elemente in der Menge.

Beispiel 1. Wir würfeln einmal. Was ist die Wahrscheinlichkeit, eine Zahl unter drei zu würfeln?

Natürlich handelt es sich hierbei um einen Laplaceversuch mit $P(\omega) = \frac{1}{6}$ für alle $\omega \in \Omega$. Wir betrachten also die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $E = \{1, 2\}$. Es gilt

$$P(E) = \frac{|\{1,2\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Übung 4.
Es wird mit einem fairen Würfel gewürfelt. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl

a) grösser als 3 ist,

b) eine ungerade Zahl ist,

c) grösser als 3 und eine Primzahl ist,

d) grösser oder gleich 3 ist?

Übung 5.
Ein Glücksrad ist in 13 gleiche Sektoren unterteilt, die von 1 bis 13 nummeriert sind. Das Glücksrad wird einmal gedreht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man

a) eine ungerade Zahl,

b) eine Primzahl,

c) eine durch 3 teilbare Zahl?

Übung 6.
Aus einem Stapel mit 36 deutschschweizer Jasskarten werden zwei Karten gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse.

a) Eine Karte ist ein sogenanntes “Brättli” (wertlose Karten von 6 bis 9) und die andere eine Punktekarte (Karten vom Banner bis zum As).

b) Es werden eine Schelle und eine Schilte gezogen.

c) Es werden zwei Schellen gezogen.

Übung 7.
Ein fairer Würfel wird zwei Mal hintereinander geworfen. Wenn der zweite Wurf dieselbe Zahl zeigt wie der erste, zählt der Wurf nicht und es wird ein weiteres Mal gewürfelt. Dies wird

solange wiederholt, bis die Würfe zwei unterschiedliche Zahlen zeigen. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) die Summe der beiden Zahlen 7 beträgt,

b) die Summe der beiden Zahlen mindestens 8 ist,

c) die erste Zahl grösser ist als die zweite?

Übung 8.
Aus einer Urne mit 50 von 1 bis 50 nummerierten Kugeln wird eine Kugel gezogen. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl auf der gezogenen Kugel

a) nicht durch 3 teilbar ist,

b) durch 3 oder durch 4 teilbar ist,

c) durch 3 und 5 teilbar ist,

d) nicht durch 51 teilbar ist?

Übung 9.
Ein fairer Würfel wird zweimal geworfen. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass

a) die Summe der Augenzahlen grösser als 3 ist,

b) das Produkt der Augenzahlen grösser als 6 ist,

c) bei mindestens einem Wurf tritt die Augenzahl 3 auf.

1.4 Mehrstufige Zufallsversuche

Lernziele

- Du stellst für eine Problemstellung ein geeignetes Baumdiagramm auf und bestimmst die einzelnen Astwahrscheinlichkeiten.
- Du berechnest Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe von Baumdiagrammen.
- Du wendest die Pfadadditions- und Pfadmultiplikationsregel in einem Baumdiagramm an.

Aus einem einfachen Zufallsversuch kann ein neuer, sogenannt mehrstufiger, Zufallsversuch gebildet werden, in dem das wiederholte Ausführen des einfachen Versuchs als ein eigener Zufallsversuch betrachtet wird. Beispiele dafür sind

- mehrfaches Würfeln oder Werfen einer Münze;
- Ziehen mehrerer Kugeln aus einer Urne;

- Prüfen mehrerer Stichproben auf ihre Funktionsfähigkeit.

Dabei können die einzelnen Stufen unabhängig voneinander sein; es ist aber auch möglich, dass eine Stufe die Wahrscheinlichkeiten der nachfolgenden beeinflusst. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn wir nacheinander mehrere Karten aus einem Stapel ziehen, ohne sie zurückzulegen. Hier ändert sich die Wahrscheinlichkeit, da dies die Anzahl der im Stapel befindlichen Karten verändert.

Der neue Ergebnisraum Ω setzt sich als Tupel[1] des ursprünglichen Ergebnisraums $\widetilde{\Omega}$ zusammen. Ist dieser also

$$\widetilde{\Omega} = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\},$$

so ist die folgende Menge der Ergebnisraum bei zweimaligem Ausführen des genannten Zufallsversuches:

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2), (\omega_2, \omega_3), \ldots\}.$$

Ω ist also der Ergebnisraum eines zweistufigen Zufallsversuches.

Beispiel 2. Beim Werfen einer Münze betrachten wir den Ergebnisraum $\widetilde{\Omega} = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$ oder kurz $\widetilde{\Omega} = \{K, Z\}$. Der Ergebisraum bei zweimaligem Werfen einer Münze ist demnach:

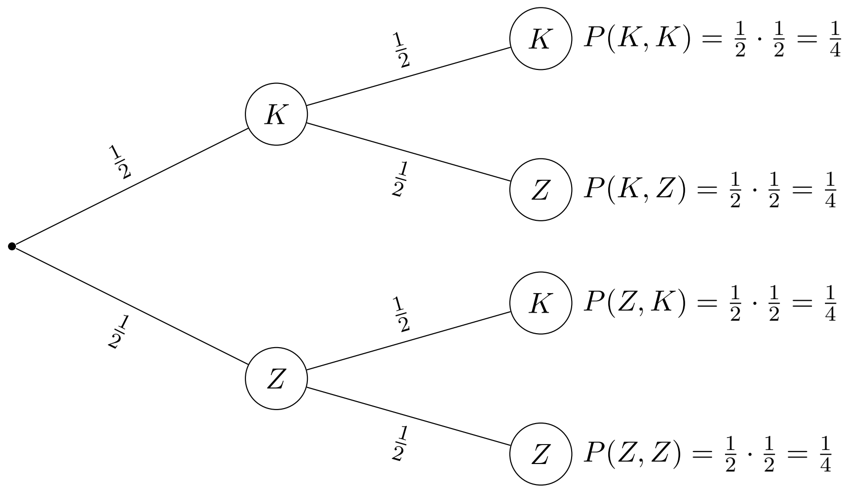
$$\Omega = \{(K, K), (Z, Z), (K, Z), (Z, K)\}.$$

Die Ordnung der Tupel ist wichtig. Das Ergebnis (Z, K) ist nicht dasselbe wie das Ergebnis (K, Z). Auch wenn die Münzen nicht unterscheiden können, ist es für die Wahrscheinlichkeit relevant, dass dieser Fall auf zwei Arten zu stande kommen kann.

Mehrstufige Zufallsversuche lassen sich mit Baumdiagrammen[2] untersuchen. Dabei ist jede Durchführung des einfachen Versuchs eine Stufe im Baum.

[1]Ein Tupel oder genauer ein n-Tupel ist eine geordnete, endliche Liste aus n Elementen einer Menge. Wir schreiben ein 3-Tupel zum Beispiel als "(a, b, c)". Mehr dazu unter `https://de.wikipedia.org/wiki/Tupel`.

[2]Die Bezeichnung der einzelnen Elemente eines Baumdiagramms sind hier erklärt: `https://de.wikipedia.org/wiki/Baum_(Graphentheorie)`



Dabei schreiben wir die Wahrscheinlichkeit der einzelnen Stufen auf die Äste des Baums. Jeder Pfad im Baum entspricht einem Ergebnis des mehrstufigen Versuchs. Daher schreiben wir die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse an das Ende des jeweiligen Pfades.

Wie im Baumdiagramm dargestellt, gilt die folgende Regel für die Berechnung der Pfadwahrscheinlichkeiten:

Satz 1.4 (Pfadmultiplikationsregel)**.** *In einem mehrstufigen Zufallsversuch wird die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses berechnet, in dem die einzelnen Wahrscheinlichkeiten der Äste entlang des Pfades multipliziert werden.*

Ein Ergebnis entsprich im Baumdiagramm einem Pfad von der Wurzel zu einem Blatt.

Da es sich bei den einzelnen Pfaden um Elementarereignisse handelt, welche jeweils nur ein Ergebnis aus Ω enthalten, gilt bei Baumdiagrammen die in Axiom 3 geforderte Additivität:

Satz 1.5 (Pfadadditionsregel)**.** *Setzt sich ein Ereignis aus mehreren Pfaden zusammen, so lässt sich die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses berechnen, in dem man die einzelnen Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Pfade addiert.*

Beispiel 3. Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wir bei zweimaligem Werfen einer Münze einmal Kopf und einmal Zahl erhalten. Dies ist das Ereignis $E = \{(K,Z),(Z,K)\}$. Es gilt also

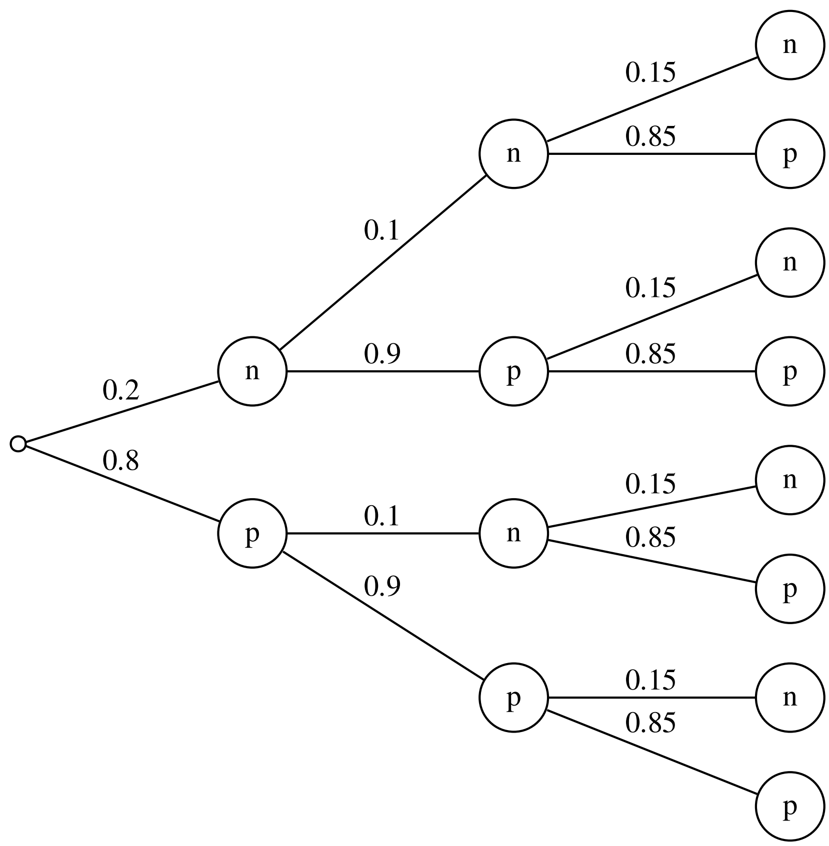
$$P(E) = P(K,Z) + P(Z,K) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Natürlich hätte man dieses Beispiel einfacher mit der Laplace-Regel rechnen können.

Beispiel 4. Bei der Herstellung von Mineralwasser wird das Wasser auf seinen Natrium, Calcium und Magnesiumgehalt untersucht. Ist der Gehalt im vorgeschriebenen Bereich, so gilt der Test als positiv (p). Andernfalls sprechen wir von einem negativen Testergebnis (n). Die untersuchten Flaschen liegen mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.2, 0.1 respektive 0.15 ausserhalb des Bereichs.

Eine Flasche wird als Ausschuss deklariert, falls sie zwei der drei Tests nicht besteht. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Flasche weggeworfen werden muss?

Dazu betrachten wir das folgende Baumdiagramm:



Der Ergebnisraums dieses Zufallsversuchs besteht aus allen Kombinationen von 3-Tupel aus den Buchstaben "n" und "p":

$$\Omega = \{(p,p,p),(p,p,n),(p,n,p),\ldots,(n,n,p),(n,n,n)\}$$

Jedes Ergebnis entspricht genau einem Pfad im Baumdiagramm. Wir betrachten das Ereignis E: "Flasche wird als Ausschuss deklariert". Es handelt sich um die folgenden vier Pfade im Baum

$$E = \{(n,n,p),(n,p,n),(p,n,n),(n,n,n)\}$$

Die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Pfade, respektive Ergebnisse werden addiert. Entlang eines Pfades wird multipliziert. Das heisst

$$\begin{aligned}
P(E) &= P(n,n,p) + P(n,p,n) + P(p,n,n) + P(n,n,n) \\
&= 0.2 \cdot 0.1 \cdot 0.85 + 0.2 \cdot 0.9 \cdot 0.15 + 0.8 \cdot 0.1 \cdot 0.15 + 0.2 \cdot 0.1 \cdot 0.15 \\
&= 0.059 = 5.9\%
\end{aligned}$$

Übung 10.
Gegeben sei das Glücksrad aus Aufgabe 3 mit Sektoren, deren Innenwinkel 60°, 90° und 120° betragen (siehe Skizze). Unser Zufallsexperiment besteht dieses Mal aus viermaligem Drehen am Rad. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass

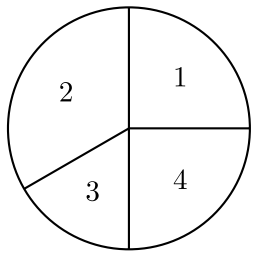
a) viermal die 1 erscheint,

b) viermal dieselbe Zahl erscheint,

c) die Summe aller vier Zahlen grösser als fünf ist,

d) alle vier Zahlen unterschiedlich sind,

e) mindestens zweimal dieselbe Zahl erscheint?



Übung 11.
In einer Urne liegen drei rote, vier schwarze und zwei gelbe Kugeln. Es werden mit einem Griff drei Kugeln gezogen. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) alle Kugeln schwarz sind,

b) alle Kugeln dieselbe Farbe haben,

c) alle Kugeln unterschiedliche Farben haben,

d) mindestens zwei die gleiche Farbe haben?

Übung 12.
Gehe zurück zur Übung 6 und löse sie erneut mit Hilfe eines Baumdiagramms.

Übung 13.
Bei der Produktion von elektronischen Bauteilen sind erfahrungsgemäss 10% der Gesamtproduktion Ausschuss (d.h. unbrauchbare Bauteile). Von den übrigen Bauteilen genügen nur 20% den Qualitätsstandards für Hochsicherheits-Anlagen und werden als Bauteile erster Wahl verkauft. Beim Rest handelt es sich um Bauteile zweiter Wahl. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Stichprobe von vier Bauteilen

a) vier brauchbare Bauteile vorliegen.

b) mindestens drei brauchbare Bauteile vorliegen?

c) genau drei für Hochsicherheitsanlagen benutzt werden können?

d) alle brauchbar sind, aber genaue zwei davon auch für Hochsicherheits-Anglagen benutzt werden können?

Übung 14.
Willhellm Tell und sein Sohn Walterli trainieren zusammen Armbrustschiessen. Dafür schiessen sie beide gleichzeitig auf einen Apfel. Tell trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{4}{5}$ und Walterli trifft den Apfel auf Grund der fehlenden Übung nur mit $\frac{3}{10}$ aller Schüsse. Wie gross ist die Wahrschinlichkeit, dass der Apfel mindestens einmal getroffen wird?

Übung 15.
Adric, Tegan und Martha gehen zusammen in der Mensa essen. Die Mensa bietet ein Vegi- und ein Fleischmenu an. Die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei das Fleischmenu essen ist $\frac{3}{8}$. Adric isst mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{4}{5}$ und Tegan mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{5}{8}$ Fleisch. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ...

a) Martha Fleisch isst,

b) Adric alleine das Fleischmenu isst,

c) mindestens eine Person vegetarisch isst,

d) höchstens eine Person Fleisch isst?

Übung 16.
Hans und Lisa würfeln einen Laplace-Würfel abwechslungsweise. Jene Person, welche zuerst eine 5 würfelt, gewinnt. Hans beginnt das Spiel. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) Hans das Spiel nach maximal drei Versuchen gewinnt,

b) Lisa das Spiel nach maximal drei Versuchen gewinnt,

c) das Spiel nach je drei Versuchen (also sechs Runden) noch nicht entschieden ist,

d) Lisa gewinnt?

Übung 17.
Drei alte Gewehre stehen in einem dunklen Schrank. Sie treffen ein Ziel mit einer Wahrscheinlichkeit von 65%, 15% und 75%. Es wird ein zufälliges Gewehr aus dem Schrank genommen und damit maximal zwei Schüsse auf eine auf einer Mauer stehenden Dose abgegeben. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Dose getroffen wird. Benutze ein Baumdiagramm.

Übung 18.
In einem Bus befinden sich 9 Passagiere, davon 4 Schmuggler und 5 ehrliche Leute. Ein Zollbeamter wählt 3 Personen zur Kontrolle aus, welche sich alle als Schmuggler erweisen. Wie gross

ist die Wahrscheinlichkeit, rein zufällig ein so gutes Resultat zu erzielen?

Übung 19.
Ein Würfel wird n mal gerollt. Für welche Zahl n ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E: “Es werden mindestens zwei Sechser gewürfelt.” grösser als 50%?

Übung 20.
Geburtstagsparadoxon Wir sind an einer Party. Der Gastgeber behauptet, die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Personen an der Party denselben Geburtstag haben, liege über 50%. Wie viele Personen müssen mindestens an der Party teilnehmen, damit der Gastgeber nicht lügt?

1.5 Kombinatorik

Lernziele

- Du eruierst in einer gegebenen Problemstellung die Anzahl Möglichkeiten. Insbesondere weisst du die folgenden Hilfsmittel geeignet einzusetzten:

  Allgemeines Zählprinzip Auf wie viele Arten können die Buchstaben des Wortes "Mississippiängeordnet werden?

  Variation ohne Wiederholung Von n Personen werden k für ein Foto in einer Reihe aufgestellt. Wie viele unterschiedliche Fotos gibt es?

  Vatiation mit Wiederholung Wie viele Worte mit k Buchstaben lassen sich aus einem Alphabet mit n buchstaben bilden?

  Kombinationen ohne Wiederholung Auf wie viele Arten kann aus n Personen eine Gruppe von k Personen gebildet werden?

- Du benutzt Kombinatorik um mit Hilfe der Laplace-Regel Wahrscheinlichkeiten zu berechnen.
- Du zählst die verschiedenen Pfade in einem Baumdiagramm mit Hilfe von kombinatorischen Formeln.

In den letzten Kapiteln haben wir Fälle angetroffen, in welchen wir verschiedene Möglichkeiten zählen mussten. Dieses Problem stellte sich sowohl bei den Anzahl Ergebnissen in einem Ereignis respektive dem Ergebnisraum oder den Anzahl Pfaden, welche bei mehrstufigen Zufallsversuchen in einem Wahrscheinlichkeitsbaum zu einem bestimmten Ereignis gehören.

Die Kombinatorik beschäftigt sich genauer mit dem Zählen von Möglichkeiten. Das der Kombinatorik zu Grunde liegende Zählprinzip haben wir in Aufgaben schon angewandt. Wir betrachten einen Zufallsversuch mit k voneinander unabhängigen Stufen:

Satz 1.6 (Allgemeines Zählprinzip)**.** *Wenn die Zahlen $m_1, m_2, \dots, m_k$ die Anzahl Ergebnisse der einzelnen Stufen bezeichnen, so besteht der Ergebnisraum Ω aus*

$$|\Omega| = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k$$

Ergebnissen.

Wir betrachten dazu ein Beispiel:

Beispiel 5. Eine Firma stellt Produkte her, bei welchen jedes einzelne mit einer unterschiedlichen Produktnummer versehen wird. Eine Produktnummer besteht aus 5 Ziffern und zwei Buchstaben. Die erste Ziffer darf keine 0 sein und ein Buchstabe darf sich nicht wiederholen und Umlaute sind nicht zulässig. Wie viele mögliche Produktnummern gibt es?

Für die erste Stelle gibt es 9 Möglichkeiten, nämlich alle Ziffern von 1 bis 9. Für die zweite bis fünfte Stelle haben wir jeweils alle 10 Ziffern von 0 bis 9 zur Auswahl.

Bei den Buchstaben können wir für den ersten Buchstaben aus allen 26 Elementen des Alphabets auswählen. Für den zweiten Buchstaben haben wir aber nur noch 25 Möglichkeiten, da ein Buchstabe schon benutzt wurde.

Insgesamt gibt es also

$$9 \cdot 10^4 \cdot 26 \cdot 25 = 58.5\,\text{Mio.}$$

mögliche Produktnummern.

In diesem Beispiel sowie für das allgemeine Zählprinzip ist wichtig, dass die einzelnen Stufen hintereinander angeordnet sind und nicht vertauscht werden können. Diese Fälle, in welchen die Reihenfolge wichtig ist, werden als *Variationen* bezeichnet.

Anders ist es hingegen, wenn wir uns z.B. fragen, auf wie viele Arten wir aus einer Kiste von 100 Legosteinen fünf Steine auswählen können, ohne dass die Reihenfolge eine Rolle spielt. Diese Fälle werden als *Kombinationen* bezeichnet.

Variationen und Permutationen

Sollen aus n Elementen k *unter Beachtung der Reihenfolge* ausgewählt werden, so sprechen wir von einer *Variation.* Im Spezialfall, bei dem wir alle Elemente auswählen (also $n = k$ gilt) und wir sie nur unterschiedlich anordnen, sprechen wir stattdessen von einer *Permutation.*

Wir unterscheiden *Variationen mit Wiederholungen* und *Variationen ohne Wiederholungen.* Diese Unterscheidung können wir uns am Urnenmodell verdeutlichen: In einer Urne befinden sich n unterscheidbare Kugeln. Wir ziehen k Kugeln aus der Urne. Legen wir die gezogene Kugel jeweils nach dem Zug wieder zurück, kann sich die Kugel wiederholen. Legen wir die Kugel nicht zurück, sind keine Wiederholungen möglich.

Beim Ziehen von Kugeln mit Wiederholungen gibt es in jedem der k Züge wieder n Möglichkeiten. Gemäss allgemeinem Zählprinzip gibt es also n^k verschiedene Möglichkeiten, Kugeln zu ziehen.

Satz 1.7 (Variation mit Wiederholung)**.** *In einem k-stufigen Zufallsversuch, bei dem jede Stufe aus n Ergebnissen besteht, hat der Ergebnisraum des gesamten Versuchs*

$$|\Omega| = n^k$$

Elemente.

Dazu ein Beispiel:

Beispiel 6. Wir drehen sieben Mal an einem Glücksrad mit gleich grossen Sektoren, welche die Zahlen 1 bis 10 tragen. Das heisst, unser Ergebnisraum besteht aus 7-tupeln, bei welchen jede Stelle eine Zahl zwischen 1 und 10 ist:

$$\Omega = \{(1,1,1,1,1,1,1),(1,1,1,1,1,1,2),\cdots,(10,10,10,10,10,10,10)\}$$

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, sieben Mal eine 10 zu erhalten?

Für jede der sieben Stelle gibt es 10 Möglichkeiten. Also haben wir insgesamt

$$\underbrace{10 \cdot 10 \cdots 10}_{7\text{mal}} = 10^7$$

Ergebnisse. Da die Sektoren gleich gross sind, sind alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich und es handelt sich um einen Laplace-Versuch. Die Wahrscheinlichkeit beträgt also

$$P(10,10,10,10,10,10,10) = \frac{1}{10^7}.$$

Kehren wir zurück zu unserem Urnenmodell. Legen wir die Kugeln nicht zurück, so gibt es für die erste Kugel n Möglichkeiten, für die nächste aber nur noch $n-1$, anschliessend nur noch $n-2$. So geht dies weiter bis zu $n-k+1$, da hören wir auf, da wir nur k Kugeln ziehen. In diesem Fall muss natürlich $k \leq n$ sein, da sonst keine Kugeln zum Ziehen mehr übrig sind.

Das heisst, wir haben insgesamt $n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-k+1)$ Möglichkeiten. Da diese Schreibweise mit den drei Punkten umständlich ist, wollen wir für diese Formel die sogenannte "Fakultät" benutzen. Dabei bezeichnet der Ausdruck "Fünf-Fakultät" das Produkt aller Zahlen von 1 bis 5. Wir schreiben $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Allgemein ist $n!$ definiert als $n! := n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$ wobei wir den Spezialfall $0!$ separat als 1 definieren. Dies ist zwar nicht sofort einsichtig, führt aber dazu, dass die unten hergeleiteten Formeln auch in Randfällen gelten, wo wir z.B. alle Elemente auswählen.

Um im obigen Fall die Fakultät benutzen zu können, müssen wir das Ganze wie folgt zu einem Bruch erweitern. Dies führt dazu, dass alle Produkte bis 1 weitergeführt werden.

$$n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-k+1) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-k+1)(n-k)\cdots 1}{(n-k)\cdots 1}$$

Wir haben also den Bruch mit den Faktoren $(n-k)$ bis 1 erweitert. Nun können wir mit der Fakultätsschreibweise das Ganze auch wie folgt schreiben:

Satz 1.8 (Variation ohne Wiederholung)**.** *In einem k-stufigen Zufallsversuch, bei dem die erste Stufe aus n Ergebnissen besteht und die folgenden jeweils immer aus einem Element weniger, hat der Ergebnisraum des gesamten Versuchs*

$$|\Omega| = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Elemente.

Beispiel 7. Wir haben fünf verschiedene Bücher A, B, C, D und E. Wie viele Möglichkeiten gibt es, drei dieser Bücher auf einem Bücherregal anzuordnen? Das Wichtige an diesem Beispiel ist, dass wir nicht nur die unterschiedliche Auswahl der Bücher anschauen, sondern auch deren Reihenfolge. Es geht darum, 3-Tupel von Büchern zu bilden. Wir wollen herausfinden, wie viele Elemente die Menge

$$\{(A,B,C),(A,C,B),\ldots,(B,C,E),\ldots\}$$

hat. Dazu betrachten wir die einzelnen Stellen. Für die erste Stelle haben wir 5 Bücher zur Auswahl. Für jede dieser fünf Wahlmöglichkeiten haben wir auf der zweiten Stelle noch vier Bücher. Auf der dritten Stelle noch drei. Das heisst insgesamt gibt es $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ Möglichkeiten. Mit der Formel gerechnet heisst das

$$\frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Kombinationen

Bei *Kombinationen* wird im Gegensatz zu Variationen die Reihenfolge nicht beachtet. Es werden also Teilmengen statt Tupel gebildet. Auch hier können wir *Kombinationen mit und ohne Wiederholungen* unterscheiden. Wir konzentrieren uns aber hauptsächlich auf den Fall ohne Wiederholungen. Dieser beantwortet die Frage "Auf wie viele Arten können von einer Menge mit n Elementen Teilmengen aus k Elementen gebildet werden?"

Als Gundlage für die neue Berechungsformel dient der Satz 1.8. Wenn wir das Beispiel 7 noch einmal betrachten, geht es nun um die Frage, auf wie viele Arten wir drei Bücher auswählen können, ohne dass die Reihenfolge eine Rolle spielt. Das heisst, die Fälle (A,B,C), (A,C,B), (B,C,A) usw. sind alle eigentlich derselbe Fall und sollten nicht einzeln gezählt werden.

Wir zählen in Satz 1.8 für jede Auswahl von drei Büchern alle möglichen Anordnungen einzeln. Jede Auswahl von drei Büchern lässt sich auf $3! = 6$ Möglichkeiten anordnen. Wir müssen die Anzahl Fälle also noch durch $3!$ teilen. Dies führt uns zum Satz:

Satz 1.9 (Kombination ohne Wiederholung)**.** *Gegeben sei eine Menge, welche n Elemente enhält. Es gibt*

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

verschiedene Teilmengen mit k Elementen.

Diese Berechnung taucht in verschiedenen Kontexten wieder auf. Daher wird dafür speziell eine Schreibweise definiert.

Definition 1.4 (Binomialkoeffizient)**.** Wir definieren die Schreibweise

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Wir lesen dies entweder als “k aus n” oder “n über k”.

Beispiel 8. Beim Lotto werden sechs Zahlen zwischen 1 und 42 ausgewählt. Was ist die Wahrscheinlichkeit, alle sechs richtig zu tippen?

Beim Lotto ist jeder Tipp gleich wahrscheinlich. Wir dürfen also die Laplace-Regel aus Satz 1.3 benutzen. Insgesamt gibt es

$$|\Omega| = \binom{42}{6} = 5245786$$

Möglichkeiten. Da nur eine davon die richtige ist, beträgt die Wahrscheinlichkeit, genau diese zu treffen

$$P = \frac{1}{5245786} \approx 1.9 \cdot 10^{-7}.$$

Wenn wir uns hingegen fragen, was die Wahrscheinlichkeit für vier richtige Zahlen ist, haben wir mehr günstige Fälle. Wir müssen vier aus den sechs richtigen auswählen. Dafür gibt es $\binom{6}{4}$ Möglichkeiten. Für jede dieser Möglichkeiten können wir die übrigen zwei auf $\binom{36}{2}$ Möglichkeiten aus den falschen auswählen. Insgesamt beträgt die Wahrscheinlichkeit also

$$P = \frac{\binom{6}{4}\binom{36}{2}}{\binom{42}{6}} = \frac{675}{374699} \approx 0.18\%$$

Wie schon erwähnt, können auch *Kombinationen mit Wiederholungen* vorkommen. Wir machen dazu ein Beispiel:

Beispiel 9. Du stehst mit grossem Hunger und noch grösserer Lust auf Süsses vor einem Glacestand. Du entscheidest dich, drei Kugeln Glace aus den fünf Geschmacksrichtungen auszuwählen.

In diesem Fall ist die Reihenfolge nicht relevant, aber die einzelnen Glacesorten können sich wiederholen. Um diesen Fall zu berechnen, benötigen wir einen kleinen Trick: Wir müssen drei nicht unterscheidbare Kugel auf fünf Geschmacksrichtungen verteilen. Nun benutzen wir die Zeichen $\circ$ für eine Glacekugel und $|$ für den Wechsel zur nächsten Geschmackssorte. So bedeutet die Zeichenkette

$$\circ\circ\circ||||$$

dass wir alle Kugeln von der ersten Sorte nehmen. Die Kette

$$\circ|\circ|||\circ$$

bedeutet, dass wir eine Kugel der ersten, eine Kugel der zweiten und eine Kugel der letzten Sorte nehmen.

Nun haben wir das Problem auf die Frage reduziert, auf wie viele Arten wir vier $|$ und drei $\circ$ anordnen können. Hierzu wählen wir aus insgesamt $3 + 5 - 1 = 7$ Stellen drei aus, um die $\circ$ zu platzieren. Anschliessend bleibt für die $|$ jeweils nur noch eine Möglichkeit.

Nun ist das Ganze auf die Frage reduziert, auf wie viele Arten wir aus 7 Elementen 3 auswählen können. Gemäss Satz 1.9 geht dies auf

$$\binom{6}{3} = \frac{7!}{3!4!} = 35$$

verschiedene Arten.

Wir können diesen Fall also wie folgt verallgemeinern:

Satz 1.10 (Kombination mit Wiederholung)**.** *Gegeben sei eine Menge, welche n Elemente enhält. Daraus sollen k Elemente ohne Beachtung der Reihenfolge ausgewählt werden, wobei sich die Elemente wiederholen dürfen. Dafür gibt es*

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

verschiedene Möglichkeiten.

Übersicht

Das Diagramm in Abbildung 1.5 dient als Entscheidungshilfe beim Verwenden der Formeln in der Kombinatorik. Natürlich lassen sich nicht alle Fälle damit abdecken, da die Formeln teilweise auch geeignet kombiniert werden müssen.

Für das Kombinieren von Formeln hilft oft das allgemeine Zählprinzip aus Satz 1.6.

Übung 21.
Wir wollen ein Telefonsystem zusammenstellen. Als Nummern erlauben wir jede beliebige, sechsstellige Ziffernkette aus den Ziffern 0 bis 9.

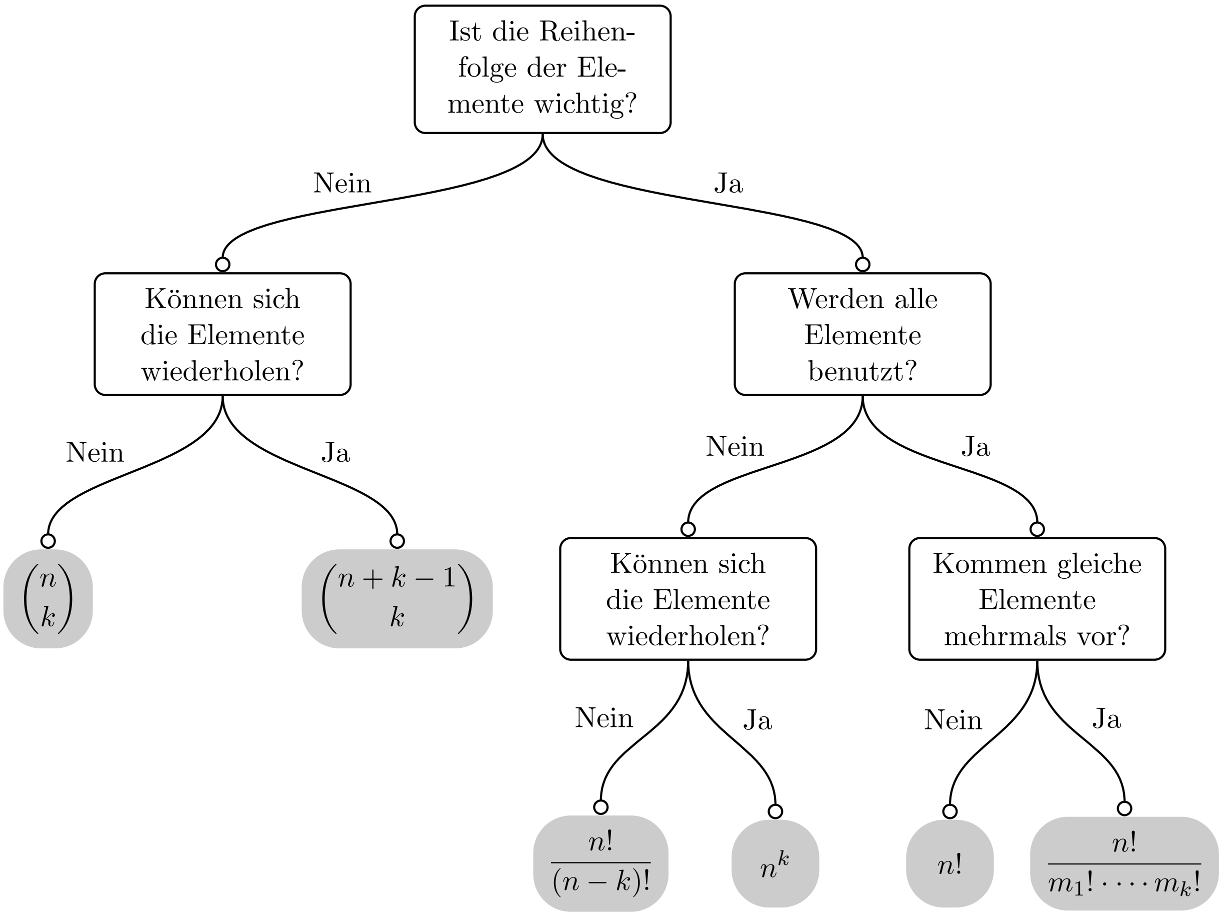


Abbildung 1: Übersicht über die Formeln der Kombinatorik

a) Wie viele solche Telefonnummern kann es maximal geben?

b) Wie viele davon bestehen nur aus geraden Ziffern?

c) Auf wie viele Arten können die Ziffern der Telefonnummer 311213 zu einer neuen Nummer angeordnet werden?

Übung 22.
8 Flaggen werden auf einem Schiff untereinander an eine Fahnenstange gehängt. Wie viele unterschiedliche Signale können aus 4 roten, 2 blauen und 2 grünen Flaggen so erstellt werden?

Übung 23.
Ein Fahrradkurier-Unternehmen hat zur Zeit 8 Kuriere ohne Auftrag am Warten. Es sollen 5 Aufträge verteilt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Aufträge zu verteilen, wenn möglichst viele Kuriere beschäftigt sein sollen?

Übung 24.
An einer Tagung werden 18 Vorträge gehalten, von denen je 3 parallel in verschiedenen Räumen stattfinden. Wie viele Möglichkeiten haben Tagungsteilnehmer, ihr eigenes Programm zusam-

men zu stellen?

Übung 25.
In einer Glaswarenfabrik werden 30 Gläser hergestellt. Beim Überprüfen werden davon 15 für erste Wahl befunden, 10 für zweite Wahl und 5 Gläser sind komplett unbrauchbar. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer Stichprobe von 6 Gläsern drei Stücke erster Wahl, zwei Stücke zweiter Wahl und ein unbrauchbares zu ziehen.

Übung 26.
Du möchtest einen Hellseher testen, indem du fünf Objekte anordnest und den Hellseher raten lässt, wie du die ihm bekannten Objekte angeordnet hast.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Hellseher richtig rät, wenn er keine hellseherischen Fähigkeiten hat?

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Hellseher genau drei Gegenstände richtig rät, wenn er rein zufällig auswählt?

Übung 27.
Auf einem Parkplatz können 20 Fahrzeuge parken. Auf wie viele Arten können die Plätze besetzt werden, wenn

a) 16 Fahrzeuge gleichzeitig ankommen,

b) 20 Fahrzeuge abgestellt werden sollen,

c) möglichst viele von 30 gleichzeitig ankommenden Fahrzeugen einen Parkplatz erhalten sollen?

Übung 28.
An dem Besuch des Cern in Genf können 20 Schüler aus 4 Parallelklassen teilnehmen. Aus Klasse A bewerben sich 8, aus Klasse B 7, aus Klasse C 9 und aus Klasse D 6 Schülerinnen. Wie viele Möglichkeiten gibt es wenn

a) aus jeder Klasse 5 Schüler fahren dürfen,

b) unter den 30 Interessentinnen 20 ausgelost werden?

Übung 29.
Beim Schieber erhält jeder der vier Spieler 9 Karten. Wie gross ist die Wahrscheinlickeit, dass

a) du alle Asse bekommst,

b) ein Spieler alle Asse bekommt,

c) ein Spieler mindestens drei Asse bekommt,

d) jeder Spieler ein As bekommt,

e) ein Spieler, welcher die Trumpffarbe ansagen kann, von einer beliebigen Farbe sowohl den Bauern als auch das Nell (die Karte mit Wert 9) bekommt?

Übung 30.
Du bewirbst dich bei der Grenzwache um einen Job. Zur Aufnahmeprüfung gehört die folgende Aufgabe: Dir wird eine Gruppe von 100 Personen präsentiert, welche 20% Schmuggler enthält. Du musst die Schmuggler in der Gruppe identifizieren. Der Test gilt als bestanden, wenn du höchstens einen Fehler von 10% machst

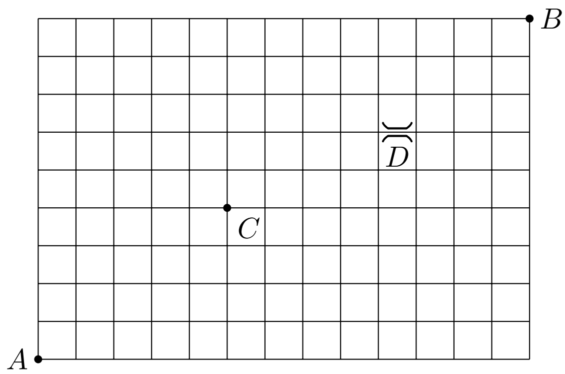
Du hast absolut keine Ahnung, woran du einen Schmuggler erkennen könntest und behauptest einfach bei zufälligen 20 Personen, dass sie Schmuggler seien. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, den Test zu bestehen?

Übung 31.
In einer Stadt, in welcher die Strassen perfekt rechtwinklig angeordnet sind, muss ein Taxifahrer von Punkt A zu Punkt B fahren. Er wählt immer den kürzesten Weg, indem er ausschliesslich nach Osten und nach Norden fährt.

a) Wie viele Wege von A nach B gibt es insgesamt?

b) Das Taxi soll auf dem Weg zu B bei C noch jemanden zusteigen lassen. Wie viele Möglichkeiten gibt es nun?

c) Wie viele kürzeste Verbindungen stehen ihm zur Verfügung, wenn er unterwegs in C jemanden abholen muss, aber die markierte Strasse bei D wegen einer Sperrung nicht benützen darf?



Übung 32.
Auf einem Schachbrett werden zufällig 8 Türme aufgestellt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie sich gegenseitig nicht schlagen können?

1.6 Bedingte Wahrscheinlichkeit und unabhängige Ereignisse

Lernziele

- Du kennst die Definition von *bedingter Wahrscheinlichkeit* und kannst sie von einer "und"-Verknüpfung unterscheiden.
- Du berechnest bedingte Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe von Baumdiagrammen und der Berechnungsformel.
- Du kannst bestimmen, ob zwei Ereignisse unabhängig voneinander sind.

Wir haben festgestellt, dass es bei mehrstufigen Zufallsversuchen vorkommen kann, dass die Wahrscheinlichkeiten einer Stufe vom Ergebnis der vorherigen Stufe abhängen. In diesem Kapitel werden wir diesen Umstand etwas genauer untersuchen. Wir betrachten dazu ein Beispiel:

Beispiel 10. Wir ziehen aus einer Urne, welche drei schwarze und drei weisse Kugeln enthalte nacheinander zwei Kugeln.

Die Frage nach der Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Kugel schwarz ist, hängt nun vom ersten Zug ab. Hier spricht man von *bedingten Wahrscheinlichkeiten.*

Die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Kugel schwarz ist unter der Bedingung, dass die erste weiss ist, beträgt $\frac{3}{5}$, da noch drei der fünf restlichen Kugeln schwarz sind.

Falls die erste Kugel auch schwarz ist, beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Kugel schwarz ist, jedoch nur $\frac{2}{5}$.

Betrachten wir die Ereignisse

E_1:"Die erste Kugel ist schwarz"

und

E_2: "Die zweite Kugel ist schwarz"

so können wir sagen, die Wahrscheinlichkeit für E_2 unter der Bedingung, dass E_1 eingetroffen ist, beträgt $\frac{2}{5}$.

Definition 1.5 (Bedingte Wahrscheinlichkeit)**.** Für zwei Ergebnisse E_1 und E_2 nennen wir die Wahrscheinlichkeit, dass E_2 eintrifft, falls E_1 schon eingetroffen ist *bedingte Wahrscheinlichkeit für E_2 unter der Bedingung E_1*. Wir schreiben dafür

$$P\left(E_2|E_1\right).$$

Beachte: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass E_1 und E_2 eintreffen (in Zeichen $P(E_1 \cap E_2)$ ist nicht dasselbe wie die Wahrscheinlichkeit für E_2 unter der Bedingung, dass E_1 eintrifft.

Im ersten Fall liegen sowohl E_1 als auch E_2 in der Zukunft und es gibt eine bestimmte Wahrscheinlichkeit, dass sie eintreffen. Im zweiten Fall ist E_1 in der Vergangenheit schon eingetroffen oder wird in der Zukunft ganz sicher eintreffen. Daher hat E_1 die Wahrscheinlichkeit für E_2 verändert.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten lassen sich mit Wahrscheinlichkeitsbäumen gut berechnen. Je nach dem, welches Ereignis wir in einem Baum als erste Stufe benutzen, kommen im Baum andere bedingte Wahrscheinlichkeiten vor. (→ Abbildung 2)

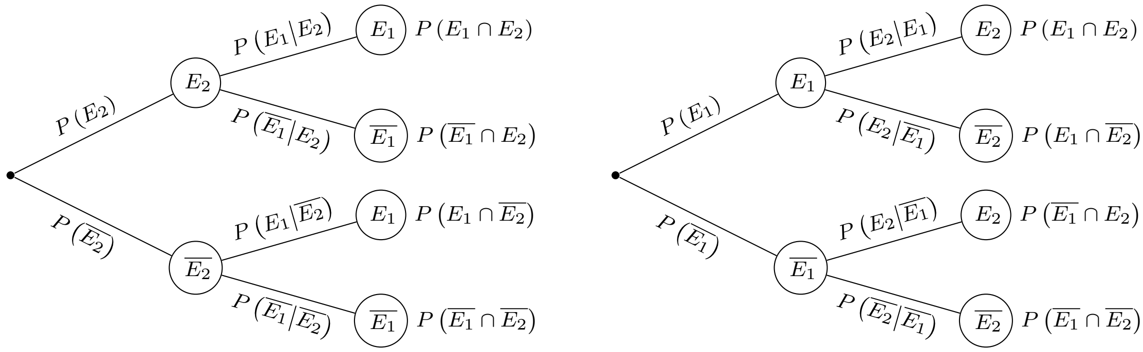


Abbildung 2: Bedingte Wahrscheinlichkeiten in Bäumen

Oft kommt es vor, dass wir beide Bäume aus Abbildung 2 aufstellen müssen, um ein Problem zu lösen. Gemäss Pfadregeln gilt $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P\left(E_2 \middle| E_1\right)$ und $P(E_1 \cap E_2) = P(E_2) \cdot P\left(E_1 \middle| E_2\right)$.

Daraus erhalten wir die folgende Regel zur Berechnung von bedingten Wahrscheinlichkeiten:

Satz 1.11. *Für zwei Ereignisse E_1 und E_2 lassen sich die bedingten Wahrscheinlichkeiten wie folgt berechnen:*

$$P\left(E_1 \middle| E_2\right) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$$

respektive

$$P\left(E_2 \middle| E_1\right) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}$$

Beispiel 11. In einem Sack befinden sich drei Würfel. Zwei davon sind wie üblich mit den Zahlen von 1 bis 6 versehen und der andere enthält je zweimal die Zahl 2, 4 und 6. Wir ziehen einen zufälligen Würfel und würfeln eine 6. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir den unüblichen Würfel gezogen haben?

In diesem Fall wissen wir ganz sicher, dass wir eine 6 würfeln. Das heisst, das Würfeln der 6 ist unsere Bedingung:

E_1: "Wir würfeln eine 6"

hingegen wissen wir nicht sicher, welchen Würfel wir erhalten haben.[3]

E_2: “Wir haben den unüblichen Würfel gezogen”

Wir sind also an der Wahrscheinlichkeit für $P\left(E_2 \middle| E_1\right)$ interessiert. Gemäss Pfadregeln gilt:

$$P(E_1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{9}$$

Weiter können wir mit der Pfadmultiplikationsregel in Satz 1.4 sagen, dass

$$P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{9}$$

Die Wahrscheinlichkeit für E_2 unter der Bedingung, dass E_1 gilt ist also

$$P\left(E_2 \middle| E_1\right) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{2}{9}} = \frac{1 \cdot 9}{9 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

Falls ein Ereignis in der ersten Stufe die zweite Stufe eines Zufallsversuches nicht beeinflusst, so sprechen wir von zwei unabhängigen Ereignissen.

Definition 1.6 (Unabhängige Ereignisse)**.** Wir nennen ein Ereignis E_2 *unabhängig* von E_1, falls

$$P(E_2) = P\left(E_2 \middle| E_1\right)$$

Wie wir später in einer Aufgabe zeigen werden, ist Unabängigkeit eine *symmetrische Relation*. Das heisst, wenn E_2 unabhängig von E_1 ist, muss auch E_1 undabhängig von E_2 sein. Daher können wir auch einfach sagen “E_1 und E_2 sind unabhängig”.

Daher ist die Formulierung des folgenden Satzes sinnvoll. Auch diesen Satz werden wir in einer Aufgabe beweisen.

Satz 1.12. *Zwei Ereignisse E_1 und E_2 sind genau dann unabhängig, wenn*

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$$

gilt.

Häufig wird anstelle der Definition 1.6 der Satz 1.12 als Definition für Unabhängigkeit von

[3]Für dieses Beispiel gehen wir davon aus, dass wir dem Würfel nicht ansehen, um welchen es sich handelt.

Ereignissen benutzt.

Übung 33.
Ein Zufallsversuch besteht aus dem zufälligen Auswählen von Wählern. Wir betrachten die folgenden Ereignisse:

E_1: "Der Wähler wählt die SMP[4]"

E_2: "Der Wähler ist über 45 Jahre alt."

Formuliere die folgenden Wahrscheinlichkeiten in Worten: $P\left(E_1 \middle| E_2\right)$, $P\left(E_2 \middle| E_1\right)$, $P\left(E_1 \middle| \overline{E_2}\right)$, $P\left(E_1 \cap E_2\right)$, $P\left(\overline{E_1} \middle| E_2\right)$.

Übung 34.
Zwei Ereignisse A und B haben die Wahrscheinlichkeiten $P(A) = 0.6$ und $P(B) = 0.45$. Weiter gilt $P(A \cap B) = 0.35$. Berechne die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P\left(A \cup B\right) \qquad P\left(A \middle| B\right) \qquad P\left(B \middle| A\right) \qquad P\left(A \middle| \overline{B}\right) \qquad P\left(B \middle| \overline{A}\right) \qquad P\left(\overline{B} \middle| \overline{A}\right)$$

Übung 35.
Ein Würfel wir einmal geworfen. Wir betrachten die Ereignisse:

E_1: "Der Würfel zeigt eine gerade Zahl"

E_2: "Die Zahl auf dem Würfel ist durch drei teilbar"

Berechne $P\left(E_1 \middle| E_2\right)$ und $P\left(E_2 \middle| E_1\right)$.

Übung 36.
Von drei Schachteln enthält die erste drei weisse Kugeln und fünf rote Kugeln. Die zweite Schachtel enthält 2 weisse und 3 rote, die dritte eine weisse und zwei rote Kugeln.

Eine Schachtel wird zufällig ausgewählt um daraus eine Kugel zu ziehen. Die Kugel ist rot. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel aus der dritten Box kam?

Übung 37.
Zwei faire Würfel werden geworfen. Sie zeigen zwei unterschiedliche Zahlen. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Zahlen gerade ist?

Übung 38.
In einer Stadt haben 30% aller Familien kein Fahrrad. 50% haben genau ein, 15% genau zwei und 5% mehr als zwei Fahrräder. Gehe davon aus, dass alle Fahrräder im Fahrradraum eines Gebäudes abgestellt sind.

a) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Familie mehr als ein Fahrrad hat?

b) In einem Fahrradraum steht ein Fahrrad einer bestimmten Familie. Wie gross ist die

[4] Schweizerische Mathematik Partei

Wahrscheinlichkeit, dass diese Familie noch weitere Fahrräder im Keller besitzt?

Übung 39.
Die Analyse von $100'000$ Unfällen zeigt, dass $39'341$ von Autolenkern unter 25 Jahren verursacht wurden. Von diesen sind $14'324$ weiblich. Von den Unfallverursachern über 25 sind $18'840$ weiblich.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Unfall von einem Mann unter 25 verursacht wurde?

b) Ein Unfall wird von einem Mann verursacht. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er unter 25 Jahre alt war?

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein von einer unter 25-jährigen Person verursachter Unfall von einer Frau verursacht wurde?

Übung 40.
Aus einem Kartenspiel mit 52 Karten zieht man eine Karte. Wir betrachten die folgenden Ereignisse:

A: "Die Karte ist eine Herz-Karte."
B: "Die gezogene Karte ist ein As."
C: "Die Karte ist rot ($\heartsuit$ oder $\diamondsuit$)."
D: "Die Karte trägt eine Zahl $(2, \ldots, 10)$."
E: "Die Karte ist der Pik Bube."

Bestehen Abhängigkeiten zwischen A und B, A und C, A und D, A und E?

Übung 41.
Eine Familie hat zwei Kinder.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder Mädchen sind, wenn bekannt ist, dass eins von beiden ein Mädchen ist.

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das jüngere der Beiden auch ein Junge ist, wenn bekannt ist, dass das ältere ein Junge ist?

Übung 42.
Beweise, dass wenn $P(E_2) = P\left(E_2 \middle| E_1\right)$ gilt, auch

$$P(E_1) = P\left(E_1 \middle| E_2\right)$$

gelten muss. Mit diesem Satz zeigst du, dass Unabhängigkeit von Ereignissen eine *symmetrische Relation* ist. Das heisst, wenn E_2 unabhangig von E_1 ist auch E_1 unabhängig von E_2 sein muss.

Übung 43.
Beweise Satz 1.12 mit Hilfe eines Baumdiagramms.

Übung 44.
Die Dopingkontrollstelle eines Sportanlasses gibt an, dass bei ihrem Testverfahren nur einer aus 1000 Athleten fälschlicherweise positiv wird. Wir gehen davon aus, dass 5% der Athleten gedopt sind und dass der Test jeden Dopingfall aufdeckt.

a) Wie gross ist die wahrscheinlichkeit, dass ein Athlet, dessen Test positiv ausfällt, auch tatsächlich gedopt ist?

b) Wie verändert sich die Wahrscheinlichkeit aus a), wenn einer aus 100 Athleten positiv getestet wird, obwohl er nicht gedopt war?

Übung 45.
Für Infektionskrankheiten werden Schnelltests entwickelt, welche dazu dienen, die Krankheit schnell zu erkennen. Diese Tests liegen aber teilweise falsch. Ein Test für eine Krankheit, von welcher 0.1% der Bevölkerung betroffen ist, könnte zum Beispiel folgende Charakteristik haben:

Bei 99.9% der tatsächlich infizierten Personen stellt der Test die Krankheit auch tatsächlich fest (*Sensitivität*). Bei 99.7% der nicht infizierten Personen fällt der Test auch tatsächlich negativ aus (*Spezifität*).

a) Angenommen, bei einer zufällig ausgewählten Person zeigt der Test ein negatives Ergebnis an. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person dennoch infiziert ist?

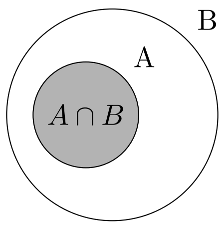
b) Bei einer zufällig ausgewählten Person fällt der Test positiv aus. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person wirklich infiziert ist?

c) Der Test wird zweimal durchgeführt und fällt beide male positiv aus. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die getestete Person tatsächlich infiziert ist?

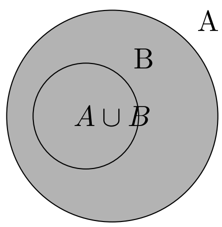
1.7 Lösungen zu den Übungen

Lösung 1.

a) Klar aus dem Venn-Diagram:



b) Hier auch:



c) Venn-Diagramm

Lösung 2.
A

Lösung 3.

a) $\Omega = \{1,2,3,4\}$; $P(1) = P(4) = \frac{1}{4}$, $P(2) = \frac{1}{3}$, $P(3) = \frac{1}{6}$

b) $P(\{3\} \cup \{4\}) = P(3) + P(4) = \frac{5}{12}$

c) $P(\{1,4\}) = P(1) + P(4) = \frac{1}{2}$

Lösung 4.

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{6}$

d) $\frac{2}{3}$

Lösung 5.

a) $\frac{7}{13}$

b) $\frac{6}{13}$

c) $\frac{4}{13}$

Lösung 6.

a) $\frac{32}{63}$

b) $\frac{9}{70}$

c) $\frac{2}{35}$

Lösung 7.

a) $\frac{1}{5}$

b) $\frac{2}{5}$

c) $\frac{1}{2}$

Lösung 8.

a) $\frac{17}{25}$

b) $\frac{12}{25}$

c) $\frac{3}{50}$

d) 1

Lösung 9.

a) $\frac{11}{12}$

b) $\frac{11}{18}$

c) $\frac{11}{36}$

Lösung 10.

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}$

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^4 + \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \left(\frac{1}{6}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{217}{10368} \approx 2.09\%$

c) $1 - \left(\frac{1}{4}\right)^4 - 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{749}{768} \approx 97.53\%$

d) $24 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \approx 8.33\%$

e) $1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$

Lösung 11.

a) $\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}=\frac{1}{21}$

b) $\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}+\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7}=\frac{5}{84}$

c) $6\cdot\frac{3\cdot4\cdot2}{9\cdot8\cdot7}=\frac{2}{7}$

d) $1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$

Lösung 12.
Siehe Lösungen für Übung 6.

Lösung 13.
Achtung, bei dieser Aufgabe muss beachtet werden, auf welche Gesamtheit sich die Prozentzahlen jeweils beziehen!

a) $0.9^4=65.61\%$

b) $4\cdot0.1\cdot0.9^3+0.9^4=94.77\%$

c) $4\cdot(1-0.9\cdot0.2)\cdot(0.9\cdot0.2)^3\approx1.913\%$

d) $6\cdot(0.9\cdot0.2)^2\cdot(0.9\cdot0.8)^2\approx10\%$

Lösung 14.
$\mathbf{E_1}$: Tell trifft.
$\mathbf{E_2}$: Walterli trifft.

$$P(E_1\cup E_2)=P(E_1)+P(E_2)-P(E_1\cap E_2)=\frac{4}{5}+\frac{3}{10}-\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{10}=\frac{43}{50}=86\%$$

oder alternativ über die Gegenwahrscheinlichkeit:

$$P(E_1\cup E_2)=1-P(\overline{E_1}\cap\overline{E_2})=1-\frac{1}{5}\cdot\frac{7}{10}=86\%$$

Weiter kann man als weitere Alternative in einem Baumdiagramm die Wahrscheinlichkeit alles Pfade zusammenzählen, in welchen mindestens einer der beiden trifft:

$$P(E_1\cap E_2)+P(E_1\cap\overline{E_2})+P(\overline{E_1}\cap E_2)=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{10}+\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{10}+\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{10}=86\%$$

Lösung 15.

a) Wir betrachten das Ereignis E: “Martha isst das Fleischmenu”. Es gilt

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{8}\cdot P(E)=\frac{3}{8}$$

Wir können also $P(E)$ wie folgt berechnen:

$$P(E) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{8}{5} = \frac{3}{4} = 75\%$$

b) $P = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{40} = 7.5\%$

c) $P = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8} = 62.5\%$

d) $P = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{4} = \frac{29}{160} = 18.125\%$

Lösung 16.

a) $\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} \approx 36.28\%$

b) $\left(\frac{5}{6}\right) \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^5 \cdot \frac{1}{6} \approx 30.23\%$

c) $\left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 33.49\%$

d) $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{5}{11} \approx 45.45\%$

(Anmerkung: Diese Lösung ist eine Anwendung von geometrische Reihen)

Lösung 17.

$p = 0.698$

Lösung 18.

$\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{21} \approx 4.76\%$

Lösung 19.

Wir betrachten $\overline{E}$: "Es wird höchstens eine Sechs gewürfelt". Für keine Sechs gibt es 5^n Möglichkeiten. Für eine 6 gibt es $n \cdot 5^{n-1}$ Möglichkeiten, nämlich n Positionen für die 6 und 5^{n-1} Möglichkeiten, die letzten Plätze aufzufüllen. Es soll also gelten:

$$P\left(\overline{E}\right) = \frac{n \cdot 5^{n-1} + 5^n}{6^n} \geq \frac{1}{2}$$

Mit dem Taschenrechner können wir die Lösung der Gleichung numerisch aproximieren und erhalten $n \leq 9.7265$. Das heisst, für $n = 10$ gilt zum ersten Mal $P\left(\overline{E}\right) < \frac{1}{2}$ und somit $P\left(E\right) > \frac{1}{2}$.

Lösung 20.

An der Party müssen mindestens 23 Personen teilnehmen.

Lösung 21.

a) $10^6 = 1'000'000$

b) $5^6 = 15625$

c) $\dfrac{5!}{3!2!} = 60$

Lösung 22.
$\dfrac{8!}{4!2!2!} = 420$

Lösung 23.
$\dfrac{8!}{3!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$

Lösung 24.
$3^6 = 729$

Lösung 25.
$\dfrac{\binom{15}{3}\binom{10}{2}\binom{5}{1}}{\binom{30}{6}} = \dfrac{5}{29} \approx 17.24\%$

Lösung 26.

a) $\dfrac{1}{5!} = \dfrac{1}{120} \approx 0.83\%$

b) $\dfrac{\binom{5}{3}}{5!} \approx 8.33\%$

Lösung 27.
Die Ergebnisse dieser Aufgabe sind sehr gross. Darum wird nur die Berechnung ohne Ergebnis angegeben.

a) $\frac{20!}{4!}$

b) $20!$

c) $\frac{30!}{10!}$

Lösung 28.
a) $\binom{8}{5}\binom{7}{5}\binom{9}{5}\binom{6}{5}$

b) $\binom{30}{20}$

Lösung 29.

a) $\dfrac{\binom{32}{5}}{\binom{36}{9}}$

b) $4\dfrac{\binom{32}{5}}{\binom{36}{9}}$

c) $4\left(\dfrac{\binom{4}{3}\binom{32}{6}}{\binom{36}{9}} + \dfrac{\binom{32}{5}}{\binom{36}{9}}\right)$

d) $\dfrac{\binom{4}{1}1\binom{32}{8}\binom{3}{1}\binom{24}{8}\binom{2}{1}\binom{16}{8}}{\binom{36}{9}\binom{27}{9}\binom{18}{9}}$

e) In diesem Fall muss man aufpassen, damit man nicht zu viele Fälle zählt. Wir bezeichnen mit E_1, E_2, E_3 und E_4 die Ereignisse, dass man Bauer und Nell der einzelnen Farben hat, hier nummeriert von 1 bis 4. Die Wahrscheinlichkeit betägt:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4) = 4\,P(E_1) - 6\,P(E1 \cap E_2) + 4\,P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) - P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4)$$

$$P = \frac{4\binom{34}{7} - 6\binom{32}{5} + 4\binom{30}{3} - \binom{28}{1}}{\binom{36}{9}} \approx 21.59\%$$

Lösung 30.
$$\frac{\binom{20}{18}\binom{80}{2} + \binom{20}{19}\binom{80}{1} + 1}{\binom{100}{20}}$$

Lösung 31.

a) $\binom{22}{13}$

b) $\binom{9}{5}\binom{13}{8}$

c) $\binom{9}{5}\left(\binom{13}{8} - \binom{6}{4}\binom{6}{3}\right)$

Lösung 32.
$$\frac{8!}{\binom{64}{8}}$$

Lösung 33.
$P(E_1|E_2)$: "Die Wahrscheinlichkeit, dass ein über 45 Jahre alter Wähler die SMP wählt"

$P(E_2|E_1)$: "Die Wahrscheinlichkeit, dass ein SMP-Wähler über 45 Jahre alt ist. "

$P(E_1|\overline{E_2})$: "Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Wähler, welcher 45 Jahre alt oder jünger ist, die SMP wählt."

$P(E_1 \cap E_2)$: "Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Wähler die SMP wählt und über 45 Jahre alt ist. "

$P(\overline{E_1}|E_2)$: "Die Wahrscheinlichkeit, dass ein über 45 jähriger Wähler eine andere Partei als die SMP wählt."

Lösung 34.
$P(A \cup B) = 0.6 + 0.45 - 0.35 = 0.7$

$P(A|B) = \frac{0.35}{0.45} \approx 0.78$

$P(B|A) = \frac{0.35}{0.6} \approx 0.58$

$P(A|\overline{B}) = \frac{0.6-0.35}{1-0.45} = \frac{0.25}{0.55} = 0.1375$

$P(B|\overline{A}) = \frac{0.45-0.35}{1-0.6} = \frac{0.1}{0.4} = 0.25$

$P(\overline{B}|\overline{A}) = \frac{1-0.7}{1-0.6} = \frac{0.3}{0.4} = 0.75$

Lösung 35.

$$P(E_1|E_2) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$P(E_2|E_1) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Lösung 36.

$$P(\text{“Dritte Schachtel”}\,|\,\text{“Kugel rot”}) = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{8}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}} = \frac{80}{227} \approx 35.25\%$$

Lösung 37.

$P = \frac{2}{5}$

Lösung 38.

a) 20%

b) $\frac{2}{7} \approx 28.57\%$

Lösung 39.

a) Bei dieser Teilaufgabe handelt es sich noch nicht um eine bedingte Wahrscheinlichkeit. Sie kann ausschliesslich mit Laplace berechnet werden. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Unfall von einer Person verursacht wird, welche unter 25 ist (E_1) *und* ein Mann ist (E_2)

$$P(E_1 \cap E_2) = \frac{|E_1 \cap E_2|}{|\Omega|} = \frac{39'341 - 14'324}{100'000} \approx 25.02\%$$

b) In diesem Fall ist gegeben, dass der Unfallverursacher ein Mann ist (E_2). Das heisst, dies steht schon fest und ist somit die Bedingung. Gesucht ist also die Wahrscheinlichkeit, dass der Verursacher unter 25 ist (E_1) *unter der Bedingung*, dass er ein Mann ist. Auch dies können wir rein mit Laplace rechnen ohne die Formel für bedingte Wahrscheinlichkeiten zu bemühen. Alle möglichen Ergebnisse sind nur einfach nur noch E_2 statt Ω.

$$P(E_1|E_2) = \frac{|E_1 \cap E_2|}{|E_2|} = \frac{39'341 - 14'324}{100'000 - 14'324 - 18'840} \approx 37.43\%$$

c) Hier ist gegeben, dass die Person, welche den Unfall verursacht hat, unter 25 Jahren ist (E_1). Nun möchten wir die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass es sich um eine Frau handelt ($\overline{E_2}$) *unter der Bedingung*, dass sie unter 25 ist. Hier wird E_1 zu allen möglichen Ergebnissen.

$$P(\overline{E_2}|E_1) = \frac{|E_1 \cap \overline{E_2}|}{|E_1|} = \frac{14'324}{39'341} \approx 36.41\%$$

Lösung 40.

- A und B sind unabhängig,
- A und C sind abhängig,
- A und D sind unabhängig,
- A und E sind abhängig.

Lösung 41.
Der Aufgabe fehlt die Angabe, wie wahrscheinlich ein Junge ist. Gehen wir von 50% aus, können wir mit Laplace rechnen.

a)
$$P = \frac{|\{(J,J)\}|}{|\{(J,J),(J,M),(M,J)\}|} = \frac{1}{3}$$

b)
$$P = \frac{|\{(J,J)\}|}{|\{(J,J),(J,M)\}|} = \frac{1}{2}$$

Lösung 44.

a) 98.14%

b) 84.03%

Lösung 45.

a) $10^{-6} = 0.0001\%$

b) $\frac{1}{4} = 25\%$

c) $\approx 99.1\%$

2 Zufallsgrössen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Lernziele

- Du kennst die Definition einer Zufallsgrösse und ihrer Verteilung.
- Du bestimmst die Verteilung einer gegebenen Zufallsgrösse.
- Du berechnest den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung einer Zufallsgrösse.
- Du benutzt den Zusammenhang zwischen Erwartungswert und häufigem Wiederholen eines Zufallsversuches um die Anzahl Erfolge abzuschätzen.
- Du beurteilst die Fairness eines Spiels über die Wahl einer geeigneten Zufallsgrösse und das Berechnen deren Erwartungswertes.

Im folgenden Kapitel werden wir die im Kapitel 1 eingeführten Begriffe und Berechnungen in ein präziseres, mathematisches Modell bringen. Dazu definieren wir *Zufallsgrössen* und deren *Wahrscheinlichkeitsverteilung.* Von diesen Verteilungen berechnen wir wiederum Kennzahlen wie den *Erwartungswert*, die *Varianz* sowie die *Standardabweichung.* Kennzahlen geben uns genauere Auskunft über verschiedene Eigenschaften einer Verteilung (siehe Kapitel 2.1).

Werden die Ergebnisse eines Zufallsversuches durch Buchstaben oder im Falle eines mehrstufigen Versuches durch n-Tupeln[5] oder angegeben, lässt sich mathematisch nur schwer fassen. Solche Ergebnisse sind umständlich, da mit ihnen nicht gerechnet werden kann. Wir lassen daher in diesem Kapitel als Ergebnisse nur noch reelle Zahlen zu. Dies erlaubt uns, mit den einzelnen Ergebnisse Berechnungen anzustellen. Wir können so Durchschnitte oder durchschnittliche Abweichungen von Ergebnissen betrachten. Meistens lassen sich die Zahlen wie zum Beispiel bei einem Würfel aus dem Kontext definieren. Ist dies nicht möglich, so nummerieren wir die Ergebnisse möglichst sinnvoll.

Weiter legt dies die Grundlage dafür, dass wir unendlich viele Ergebnisse zulassen können. Dies ist in Fällen hilfreich, wo ein Ergebnis eine beliebige relle Zahl auf einem Intervall sein kann. Dies ist beispielsweise bei Zeitpunkten, Distanzen und anderen physikalischen Grössen der Fall.

Im Kapitel 3 benötigen wir Zufallsgrössen anschliessend in statistischen Untersuchungen, wo wir von einer bestimmten Verteilung ausgehen. Eine wichtige Rolle spielt dabei die *Binomialverteilung* und die *Normalverteilung.*

Diese oben verlangte Zuordnung von Ergebnissen zu reellen Zahlen nennen wir Zufallsgrösse X.

Definition 2.1 (Zufallsgrösse)**.** Für einen gegebenen Zufallsversuch mit Ergebnisraum Ω ist eine Zufallsgrösse eine Funktion, welche einem einzelnen Ergebnis $\omega \in \Omega$ eine reelle

[5] https://de.wikipedia.org/wiki/Tupel

Zahl $k \in \mathbb{R}$ zuordnet:

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

Für die Menge aller Ergebnisse ω, welche einer bestimmten Zahl k zugeordnet werden, schreiben wir

$$(X = k)$$

Es gilt also:

$$(X = k) := \left\{ \omega \in \Omega \middle| X(\omega) = k \right\}.$$

In der obigen Definition ist $(X = k)$ eine Menge von Ereignissen. Eine Menge von Ergebnissen haben wir als Ereignis bezeichnet und daher ist $(X = k)$ das Ereignis, welches alle Ergebnisse enthält, die der Zahl k zugeordnet werden.

Natürlich sind wir auch in diesem Fall an der Wahrscheinlichkeit eines solchen Ereignisses interessiert. Aus diesem Grund definieren wir eine weitere Zuordnung: Die *Wahrscheinlichkeitsverteilung* einer Zufallsgrösse X ordnet jeder vorkommenden Zahl k die Wahrscheinlichkeit $P(X = k)$ zu, also die Wahrscheinlichkeit der Ereignisses $(X = k)$.

Definition 2.2 (Wahrscheinlichkeitsverteilung)**.** Für eine Zufallsgrösse X nennen wir eine Funktion P, welche jedem Wert k eine Wahrscheinlichkeit zuordnet die *Wahrscheinlichkeitsverteilung* von X. Wir schreiben

$$P(X = k) : \mathbb{R} \to [0, 1]$$

Natürlich gilt auch hier, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten für alle möglichen Werte k gleich 1 sein muss.

Wir haben somit die folgenden Funktionen:

$$\begin{array}{ccccc} \Omega & \xrightarrow{X} & \mathbb{R} & \xrightarrow{P} & [0,1] \\ \omega & \xmapsto{X} & k & \xmapsto{P} & P(X = k) \\ \text{Ergebnis} & & \text{Ergebnis als Zahl} & & \text{Wahrscheinlichkeit} \end{array}$$

Häufig werden die Verteilungen von Zufallsgrössen in einem *Histogramm* dargestellt. In diesem Fall bezeichnet "Histogramm" ein Balkendiagramm, bei welchem auf der horizontalen Achse alle Werte für k notiert werden. Jedem Wert wird in vertikaler Richtung ein Balken der Höhe $P(X = k)$ zugeordnet. Ein Beispiel für ein Histogramm ist in Abbildung 3.

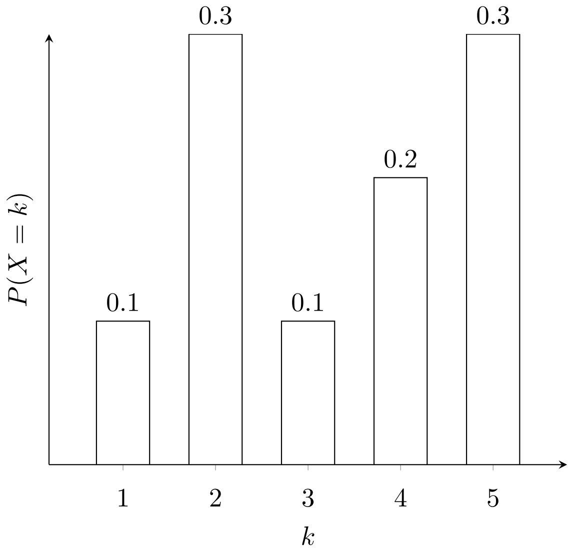


Abbildung 3: Histrogramm für eine Zufallsgrösse X

Die Skala auf der y-Achse wird so gewählt, dass die Balken gut unterschieden werden können. Die y-Werte sind werden mit grösser werdenden Anzahl Werte für k tendentiell kleiner, da die Summe aller Wahrscheinlichkeiten 1 sein muss.

Beispiel 12. Beim Werfen von zwei Würfeln betrachten wir den folgenden Ergebnisraum:

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), (2,1), \ldots, (6,6)\}$$

Weiter sei die Zufallsgrösse X wie folgt definiert:

X: "Augensumme der zwei Zahlen"

Es gilt zum Beispiel $X(4,3) = 7$. Umgekehrt ist das Ereignis $(X = 7)$ die Menge aller Ergebnisse, welchen X die Zahl 7 zuordnet, also

$$(X = 7) = \{(6,1), (1,6), (2,5), (5,2), (4,3), (3,4)\}.$$

Eine Zufallsgrösse mit endlich vielen Werten für k lässt sich gut in einer Tabelle darstellen. In dieser führen wir die möglichen Werte für k, die Ergebnisse in $(X = k)$ und die zugehörige Wahrscheinlichkeit $P(X = k)$ in je einer Spalte auf. Für das Beispiel der Aufgensumme eines Würfels resultiert daraus das Beispiel in Tabelle 1.

Die Wahrscheinlichkeiten in der letzten Spalte sind die Verteilung der Zufallsgrösse X. Mit Hilfe dieser Werte kann das Histogramm in Abbildung 4 erstellt werden.

k	X=k	P(X=k)
2	$(1,1)$	$\frac{1}{36}$
3	$(2,1),(1,2)$	$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$
4	$(3,1),(1,3),(2,2)$	$\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$
5	$(4,1),(1,4),(3,2),(2,3)$	$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$
6	$(5,1),(1,5),(2,4),(4,2),(3,3)$	$\frac{5}{36}$
7	$(6,1),(1,6),(2,5),(5,2),(4,3),(3,4)$	$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$
8	$(6,2),(2,6),(3,5),(5,3),(4,4)$	$\frac{5}{36}$
9	$(6,3),(3,6),(4,5),(5,4)$	$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$
10	$(6,4),(4,6),(5,5)$	$\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$
11	$(6,5),(5,6)$	$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$
12	$(6,6)$	$\frac{1}{36}$

Tabelle 1: Verteilung der Zufallsgrösse X

Übung 1.
Ein Glücksrad mit vier gleich grossen Abschnitten, welche mit den Zahlen 1 bis 4 beschriftet sind, wird zwei Mal gedreht. Bestimme die Verteilungstabelle und das Histogramm für die Zufallsgrösse

X: "Summe der beiden erschienenen Zahlen."

Übung 2.
Vier Münzen werden gleichzeitig geworfen. Erstelle die Verteilungstabelle und das Histogramm für die Zufallsgrösse

X: "Anzahl Mal Kopf in einem Wurf."

Übung 3.
Eine faire Münze wird geworfen, bis zum ersten mal Zahl oder vier mal nacheinander Kopf erscheint. Betrachte die Zufallsgrösse

X: "Anzahl Mal Kopf in einem Durchgang."

a) Bestimme die Verteilungstabelle und erstelle ein Histogramm.

b) Mit wie vielen Würfen ist durchschnittlich zu rechnen?

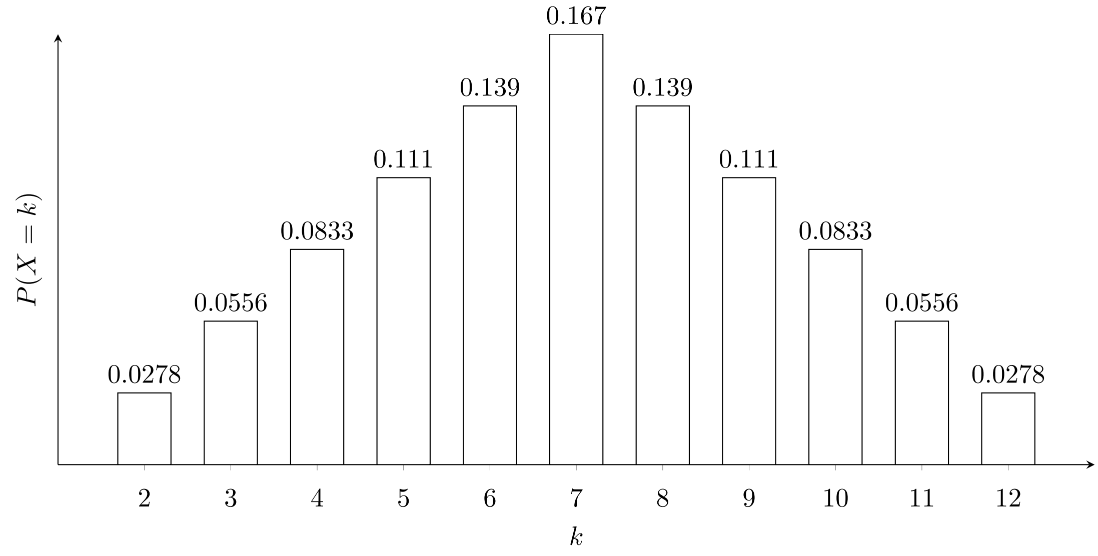


Abbildung 4: Histogramm zur Verteilung der Würfelsumme zweier Würfel

2.1 Erwartungswert und Standardabweichung

Zufallsgrössen haben den Vorteil, dass sie Ergebnisse immer als reelle Zahlen auffassen. Dies hilft uns, Ergebnisse und ihre Wahrscheinlichkeiten mit mathematischen Mitteln zu analysieren.

So können wir zum Beispiel berechnen, was der Durchschnitt aller Ergebnisse ist, wenn wir den Versuch sehr oft wiederholen (Erwartungswert) oder wie gross die durchschnittliche Abweichung von diesem Wert ist.

Da nicht alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sein müssen, können wir für den Durchschnitt nicht alle möglichen Werte für k zusammenzählen und durch die Anzahl Möglichkeiten teilen, sondern müssen sie noch mit der dazugehörenden Wahrscheinlichkeit gewichten.

Definition 2.3 (Erwartungswert)**.** Sei X eine Zufallsgrösse welche Ergebnisse den Werte $\{k_1, \ldots, k_m\}$ zuordnet. Ihre Verteilung bezeichen wir mit $P(X = k_i)$ für alle i aus $\{1, \ldots, m\}$. Der Erwartungswert $E(X)$ ist wie folgt definiert:

$$E(X) := k_1 \cdot P(X = k_1) + \cdots + k_m \cdot P(X = k_m) = \sum_{i=1}^{k} k_i \cdot P(X = k_i)$$

Der Erwarungswert wird auch mit dem Buchstaben μ bezeichnet.

Je häufiger ein Versuch durchgeführt wird, um so näher wird der Durchschnitt aller Ergebnisse beim Erwartungswert μ liegen.

Beispiel 13. Wir betrachten erneut die Verteilungstabelle 1 aus Beispiel 12 für die Zufallsgrösse

X: "Augensumme der zwei Zahlen"

bei zweimaligem Würfeln. Wir fügen aber eine neue Spalte ein, in welcher wir die einzelnen Summanden für den Erwartungswert aufführen. Diese haben alleine keine spezielle Bedeutung. Sie helfen uns aber, den Erwartungswert zu berechnen: Wir müssen nur noch die letzte Spalte der Tabelle addieren.

k	X=k	P(X=k)	$k \cdot P(X = k)$
2	$(1,1)$	$\frac{1}{36}$	$2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$
3	$(2,1),(1,2)$	$\frac{1}{18}$	$3 \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{6}$
4	$(3,1),(1,3),(2,2)$	$\frac{1}{12}$	$4 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$
5	$(4,1),(1,4),(3,2),(2,3)$	$\frac{1}{9}$	$5 \cdot \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$
6	$(5,1),(1,5),(2,4),(4,2),(3,3)$	$\frac{5}{36}$	$6 \cdot \frac{5}{36} = \frac{5}{6}$
7	$(6,1),(1,6),(2,5),(5,2),(4,3),(3,4)$	$\frac{1}{6}$	$7 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$
8	$(6,2),(2,6),(3,5),(5,3),(4,4)$	$\frac{5}{36}$	$8 \cdot \frac{5}{36} = \frac{20}{18}$
9	$(6,3),(3,6),(4,5),(5,4)$	$\frac{1}{9}$	$9 \cdot \frac{1}{9} = 1$
10	$(6,4),(4,6),(5,5)$	$\frac{1}{12}$	$10 \cdot \frac{1}{12} = \frac{5}{6}$
11	$(6,5),(5,6)$	$\frac{1}{18}$	$11 \cdot \frac{1}{18} = \frac{11}{18}$
12	$(6,6)$	$\frac{1}{36}$	$12 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{3}$
			$E(X) = 7$

Der Erwartungswert sagt nichts über die Streuung der einzelnen Ergebnisse aus. Dafür benötigen wir eine weitere Kennzahl. Die *Varianz* gibt Auskunft die Streuung der Werte um den Erwartungswert an. Sie ist die durchschnittliche quadratische Abweichung vom Erwartungswert.

Definition 2.4 (Varianz)**.** Die Varianz einer Zufallsgrösse X, welche die Werte k_1 bis k_m annimmt und den Erwartungswert μ hat, ist definiert als:

$$V(X) = \sum_{i=1}^{m} (k_i - \mu)^2 P(X = k_i).$$

Es lässt sich aber eine einfachere Formel herleiten:

Satz 2.1. *Sei X eine Zufallsgrösse, welche die Werte k_1 bis k_m annimmt und den Erwartungswert μ hat. Ihre Varianz kann wie folgt berechnet werden:*

$$V(X) = \sum_{i=1}^{m} k_i^2 P(X = k_i) - \mu^2$$

Da die Varianz die durchschnittliche *quadratische* Abweichung angibt, ist sie wenig nützlich, wenn wir die effektive durchschnittliche Abweichung wissen wollen. Um die Quadrate auszuglichen, definieren wir die *Standardabweichung* als Wurzel der Varianz.

Definition 2.5 (Standardabweichung)**.** Die Standardabweichung σ einer Zufallsgrösse ist definiert als

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

Da diese Formeln eher komplex aussehen, versuchen wir sie uns an Hand eines einfachen Beispiels zu verdeutlichen: Das einmalige Würfeln.

Beispiel 14. Für einen fairen Würfel betrachten wir die naheliegende Zufallsgrösse

X: "Augenzahl des Würfels."

Für alle Werte k gilt hier $P(X = k) = \frac{1}{6}$. Wir sprechen von einer *gleichverteilten* Zufallsgrösse. Der Erwartungswert ist in diesem Fall tatsächlich einfach der Durchschnitt der Werte:

$$E(X) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3.5$$

Die Varianz können wir wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{1}{6}(1-3.5)^2 + \frac{1}{6}(2-3.5)^2 + \frac{1}{6}(3-3.5)^2 + \frac{1}{6}(4-3.5)^2 + \frac{1}{6}(5-3.5)^2 + \frac{1}{6}(6-3.5)^2 \\ &= \frac{1}{6}\left((-2.5)^2 + (-1.5)^2 + (-0.5)^2 + 0.5^2 + 1.5^2 + 2.5^2\right) \\ &= \frac{35}{12} \approx 2.917\end{aligned}$$

Somit ist die Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1.4142$$

An diesem Beispiel wird auch deutlich, warum wir die einzelnen Werte quadrieren und anschliessend wieder die Wurzel ziehen. Dies gibt zwar nicht exakt das arithmetische Mittel der

Abweichungen, aber wir werden die negativen Vorzeichen der Differenzen los, ohne dass wir einen Betrag benutzen müssen. Der Betrag wäre auch eine mögliche Wahl, da sich Betragsfunktionen im Allgemeinen nicht differenzieren lassen, wird darauf verzichtet.

Übung 4.
Die Seiten eines fairen Würfels sind mit den Zahlen $1, 2, 2, 3, 3, 3$ versehen.

a) Betrachte die Zufallsgrösse

   X: "Gewürfelte Zahl bei einmaligem Werfen des Würfels".

   Bestimme die Verteilung von X und berechne ihren Erwartungswert $E(X)$ sowie die Standardabweichung σ.

b) Betrachte die Zufallsgrösse

   Y: "Augensumme bei zweimaligem Werfen des Würfels".

   Berechne die Verteilung von Y und ihren Erwartungswert $E(Y)$ sowie die Standardabweichung σ.

Übung 5.
Die Zufallsgrösse X hat die folgende Verteilung:

k	1	2	3	4	5
P(X=k)	a	0.3	0.2	0.1	0.2

Berechne a sowie μ und σ.

Übung 6.
Die Zufallsgrösse X hat den Erwartungswert $\mu = 4.9$ und die Verteilung

k	2	3	4	5	6	7
P(X=k)	0.05	0.25	a	b	0.1	0.3

Zeige, dass $a = b$ und berechne die Standardabweichung σ.

Übung 7.
In einem Karton sind 6 Lämpchen wovon die Hälfte defekt sind. Wie oft muss ich im Durchschnitt ziehen (ohne Zurücklegen), um

a) ein brauchbares Lämpchen zu erhalten,

b) zwei brauchbare Lämpchen zu ziehen?

Übung 8.
Ein Zufallsversuch besteht daraus, dass eine Münze fünf Mal geworfen wird. Dieser Versuch wir sehr oft wiederholt.

a) Wie oft können wir im Durchschnitt “Kopf” erwarten, wenn es sich um eine faire Münze handelt?

b) Wie oft können wir im Durchschnitt “Kopf” erwarten, wenn die Wahrscheinlichkeit für “Kopf” bei $\frac{1}{3}$ liegt?

Übung 9.
Ein Zufallsversuch besteht daraus, dass wir aus einer Urne mit einem Griff fünf Kugeln ziehen. Wie viele schwarze Kugeln können wir im Durchschnitt erwarten, wenn der Versuch oft wiederholt wird, falls die Urne

a) fünf weisse und fünf schwarze Kugeln enthält,

b) fünf weisse und 10 schwarze Kugeln enthält?

Übung 10.
Luke und Leia werfen drei Münzen. Für jede Münze, welche “Kopf” zeigt, zahlt Luke an Leia einen Franken.

a) Bestimme die Verteilung der Zufallsgrösse

   X: “Betrag, welcher Luke an Leia zahlt.”

   und ihren Erwartungswert.

b) Ein Spiel wird als *fair* bezeichnet, falls der durchschnittliche Gewinn bei 0 Franken liegt. Damit das Spiel fair wird, muss also Leia einen Einsatz an Luke bezahlen. Wie hoch muss dieser sein, dass das Spiel fair wird?

Übung 11.
Kaylee und Wash vereinbaren, eine Münze so lange zu werfen, bis das erste Mal “Kopf” erscheint. Für jeden notwendigen Wurf zahlt Kaylee an Wash einen Franken. Wie gross muss der Einsatz von Wash sein, wenn

a) sie maximal fünf Mal werfen? Ist nach fünf Würfen noch kein Kopf erschienen, so zahlt Kaylee 7 Franken an Wash.

b) das Spiel so lange weitergeführt wird, bis Kopf erscheint?

Übung 12.
Du bekommst das folgende Spiel angeboten: Für einen Franken Einsatz darfst du drei Würfel werfen. Würfelst du mindestens einmal eine 6, so bekommst du die Anzahl 6er plus deinen Einsatz als Gewinn zurück. Erscheint keine 6, so ist dein Einsatz verloren.

Lohnt sich dieses Spiel langfristig?

Übung 13.
Heidi schlägt Peter folgendes Spiel vor: “Wir legen in eine Schachtel sieben gleich grosse Kugeln. Drei schwarze und vier weisse. Dann ziehe ich blindlings drei Kugeln. Sind es mehr schwarze

als weisse, so bezahle ich dir 4 Franken, andernfalls bezahlst du mir 3 Franken."

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Peter das Spiel?

b) Wie gross ist sein zu erwartender Gewinn oder Verlust durchschnittlich?

c) Lohnt sich das Spiel für Peter?

Übung 14.
In einem Sportturnier treffen zwei gleich starke Mannschaften aufeinander. Ein Spiel gilt als gewonnen, wenn eine Mannschaft drei Sätze zu ihren Gunsten entscheidet. Bestimme den Erwartungswert für die Anzahl der durchzuführenden Sätze.

Übung 15.
Beim Zahlenlotto kann man 6 aus 45 Zahlen ankreuzen. Anschliessen werden die 6 Gewinnzahlen gezogen. Von diesen kann man 0 bis 6 richtig getippt haben. Wie viele Richtige kann man im Durchschnitt erwarten?

Übung 16.
In einem Casino wird folgendes Spiel angeboten: Im Jackpot ist zu Beginn 1 Fr. und du darfst eine Münze werfen. Zeigt die Münze Kopf, nimmst du das Geld aus dem Pot und das Spiel ist zu Ende. Zeigt die Münze hingegen Zahl, wird das Geld im Jackpot verdoppelt und du wirfst die Münze erneut.

Wie viel Geld würdest du bezahlen um in diesem Spiel mitzumachen?

2.2 Bernoulliversuche und die Binomialverteilung

Lernziele

- Du beurteiltest, ob es sich bei einem Zufallsversuch um einen Bernoulliversuch handelt.
- Du erkennst in einer Aufgabe, ob die Binomialverteilung anwendbar ist berechnetest die einzelnen Wahrscheinlichkeiten einer binomialverteilten Zufallsgrösse und und interpretierst das Ergebnis.
- Du berechnest die Wahrscheinlichkeiten von kumulierten Ereignissen (z.B. "mehr als k Erfolge")
- In geeigneten Fällen schätzt du Ziehen ohne Zurücklegen mit der Binomialverteilung ab.
- Du benutzt den Taschenrechner, um die Wahrscheinlichkeiten einer binomialverteilten Zufallsgrösse zu berechnen.
- Du schätzt die Stichprobengrösse auf Grund eines vorliegenden Ausgangs eines Zufallsversuches.
- Du findest Umgebungen um den Erwartungswert, in welchem die Ergebnisse mit der geforderten Wahrscheinlichkeit liegen.

Die Binomialverteilung ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung eines mehrstufigen Zufallsversuches, wobei die einzelnen Stufen durch sogenannte Bernoulliversuche gebildet werden. Ein Bernoulliversuch ist ein Versuch mit nur zwei Ergebnissen.

Definition 2.6 (Bernoulliversuch)**.** Ein Zufallsversuch mit nur zwei Ergebnissen wird *Bernoulliversuch* genannt. Wir bezeichnen die Ergebnisse mit *Erfolg* und *Misserfolg*. Wir sprechen auch von einem *Null-Eins-Versuch* und schreiben für die Ergebnismenge

$$\Omega = \{0, 1\},$$

wobei 0 für Misserfolg und 1 für Erfolg steht.

Dabei bezeichnet p die Erfolgswahrscheinlichkeit und $q = p - 1$ die Misserfolgswahrscheinlichkeit.

Trotz den Bezeichnungen "Erfolg" und "Misserfolg" muss nicht gegeben sein, dass eines der Ergebnisse wünschenswerter ist als das andere. Wir ein Bernoulliversuch mehrmals wiederholt, bleibt die Erfolgswahrscheinlichkeit p gleich. Ziehen ohne Zurücklegen kann daher zum Beispiel nicht als Bernoulliversuch betrachtet werden. Folgendes sind Beispiele für Bernoulliversuche:

- Werfen einer Münze: $\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$.
- Geburt eines Kindes: $\Omega = \{\text{Mädchen}, \text{Knabe}\}$.
- Qualitätsprüfung eines Produktes: $\Omega = \{\text{ganz}, \text{beschädigt}\}$.
- Würfeln einers bestimmten Zahl: $\Omega = \{\text{keine } 6, 6\}$.

Führen wir einen Bernoulliversuch mehrmals aus und zählen die Anzahl Erfolge, so erhalten wir die Binomialverteilung

Definition 2.7 (Binomialverteilung)**.** Bei n-maligem Ausführen eines Bernoulliversuches mit Erfolgswahrscheinlichkeit p nennen wir die Zufallsgrösse X: "Anzahl Erfolge" eine *binomialverteilte* Zufallsgrösse. Wir bezeichnen die Verteilung $P(X = k)$ in diesem Fall mit $B_{n,p}(k)$

Die Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung haben wir in den Aufgaben des Kapitels 2.1 schon benutzt, ohne diesen Namen zu verwenden.

Satz 2.2. *Es gilt*

$$B_{n,p}(k) = \binom{n}{k} p^k \, (1-p)^{n-k}$$

Oft sind wir nicht an einer bestimmten Wahrscheinlichkeit interessiert sondern fragen nach der Wahrscheinlichkeit, dass es mindestens oder höchstens eine bestimmte Anzahl Erfolge gibt. Für diese Berechnung benötigen wir die *kumulierte Wahrscheinlichkeitsverteilung*: $P(X \leq k)$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit für k oder weniger Erfolge. Diese besteht aus nichts anderem als der Summe aller Fälle, welche im gewünschten Bereich liegen.

Satz 2.3 (kumulierte Binomialverteilung)**.** *Sei X eine binomialverteilte Zufallsgrösse mit Erfolgswahrscheinlichkeit p, so gilt*

$$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i \, (1-p)^{n-i}$$

Satz 2.4 (Kennzahlen der Binomialverteilung)**.** *Für eine binomialverteilte Zufallsgrösse mit n Wiederholungen und Erfolgswahrscheinlichkeit p beträgt der Erwartungswert*

$$\mu = n \cdot p$$

und die Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

Beweis. Wir beweisen nur die Tatsache, dass $\mu = n \cdot p$ gilt. Dafür benutzen wir die Definition 2.3 des Erwartungswertes und formen geeignet um.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} && (1)\\
&= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} && (2)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} && (3)\\
&= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} && (4)\\
&= np \sum_{i=0}^{m} \frac{(m+1-1)!}{(i+1-1)!(m+1-(i+1))!} p^{i+1-1} (1-p)^{m+1-(i+1)} && (5)\\
&= np \underbrace{\sum_{i=0}^{m} \frac{m!}{i!(m-i)!} p^{i} (1-p)^{m-i}}_{=1} && (6)\\
&= np && (7)
\end{aligned}$$

Wir beginnen den Beweis in (3), in dem wir den Faktor k mit dem ersten Faktor von $k!$ kürzen. Somit steht im Nennen nur noch $(k-1)!$.

In (4) klammern wir n und p aus. Dabei wird $n!$ zu $(n-1)!$ und der Exponent von p^k wird um eins auf p^{k-1} reduziert.

Im Schritt (5) substituieren wir für $k = i+1$ und $n = m+1$. Wenn wir nun in der Summe i als Laufvariable benutzen, muss sie nur noch von 0 bis m laufen.

Die kompliziert aussehende Summe in (6) ist im Grunde genommen nur noch die Summe aller Wahrscheinlichkeiten einer Binomialverteilung. Da sie alle Fälle von 0 bis m beinhaltet, muss diese Summe 1 ergeben.

□

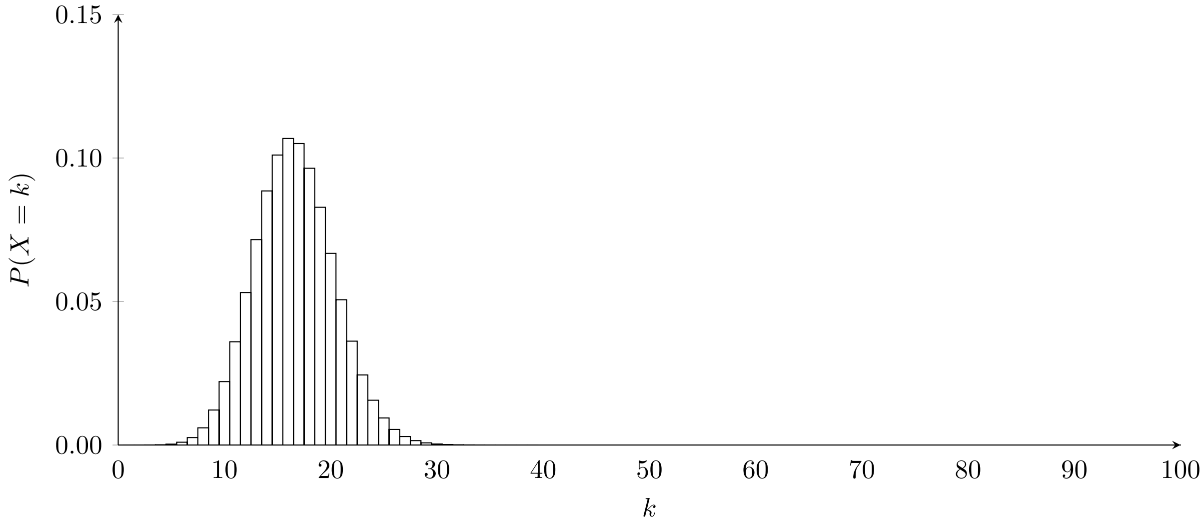
Die Binomialverteilung lässt sich mit dem grossen Taschenrechner berechnen:

$B_{n,p}(k)$	`binompdf(n,p,k)`
$P(X \leq k)$	`binomcdf(n,p,k)`
$P(X \geq k)$	`binomcdf(n,p,k,n)`
$P(k_1 \leq X \leq k_2)$	`binomcdf(n,p,k1,k2)`

Beispiel 15. Wir werfen einen Würfel 100 Mal mit dem Ziel, möglichst viele 6er zu würfeln. Ein Wurf des Würfels wird hier als Bernoulliversuch aufgefasst. Das Würfeln einer 6 stellt einen Erfolg dar und das Würfeln einer anderen Zahl einen Misserfolg. Wir betrachten also die Zufallsgrösse

X:"Anzahl 6er bei 100 Mal würfeln".

Die Erfolgswahrscheinlichkeit beträgt $p = \frac{1}{6}$ und die entsprechende Misserfolgswahrscheinlichkeit ist $q = \frac{5}{6}$. Das Histogramm zu dieser Verteilung sieht folgendermassen aus:



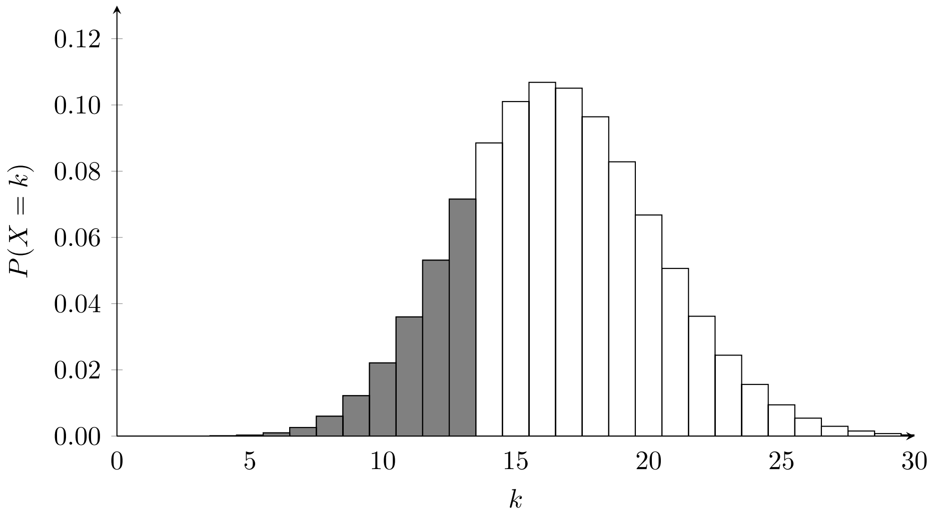
In diesem Bild sehen wir, dass die Einzelwahrscheinlichkeiten klein sind. Berechnen wir nun zum Beispiel die Wahrscheinlichkeit, dass wir genau 10 mal eine 6 Würfeln, so ist dies

$$B_{100,\frac{1}{6}}(13) = \binom{100}{13}\left(\frac{1}{6}\right)^{13}\left(\frac{5}{6}\right)^{83} \approx 2.15\%$$

Die Wahrscheinlichkeiten in der Umgebung des Erwartungswertes sind am grössten, je näher wir n am rechten oder linken Rand des Intervalls wählen, um so kleiner werden die Einzelwahrscheinlichkeiten. Daher sind diese für grosse n oft nicht spannend. Interessanter ist die Frage nach der Wahrscheinlichkeit, dass wir *höchstens* 13 mal eine 6 würfeln. Diese beträgt

$$P(X \leq 13) = \sum_{i=0}^{13}\binom{100}{i}\left(\frac{1}{6}\right)^{i}\left(\frac{5}{6}\right)^{100-i} \approx 20\%$$

Dies ist die Summe aller Wahrscheinlichkeiten $k \leq 13$, also die Summe der grau markierten Balken:

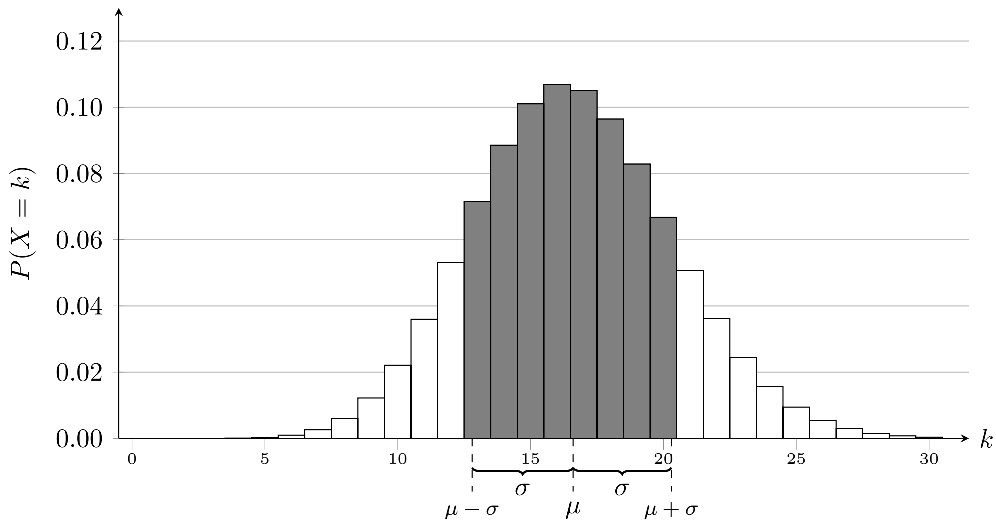


In diesem Versuch erwarten wir durchschnittlich $\mu = 100 \cdot \frac{1}{6} \approx 16.6$ mal eine 6. Die Standardabweichung beträgt $\sigma = \sqrt{100 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} \approx 3.73$. Dies bedeutet, dass die Ergebnisse sich meist auf einen recht engen Bereich um den Erwartungswert konzentrieren.

Häufig sind wir an den Wahrscheinlichkeiten in symmetrischen Intervallen um den Erwartungswert interessiert. Wir können uns zum Beispiel fragen, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein Ergebnis maximal um eine Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht. Wir berechnen

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = P(13 \leq X \leq 20) = \sum_{i=13}^{20} \binom{100}{i} \left(\frac{1}{6}\right)^i \left(\frac{5}{6}\right)^{100-i} \approx 71.84\%$$

Wir haben die Summe der folgenden grau markierten Wahrscheinlichkeiten berechnet.



Da bei binomialverteilten Zufallsgrössen keine reellen Werte für k möglich sind, müssen wir die Grenzen auf ganze Zahlen runden.

Mit dem Taschenrechner können wir dieselbe Wahrscheinlichkeit mit dem Befehl `binomcdf(100, 1/6, 13, 20` berechnen.

Übung 17.
Welche der folgenden Zufallsgrössen X sind binomialverteilt? Gib allenfalls an, was als Erfolg respektive Misserfolg interpretiert wird und wie gross die Erfolgswahrscheinlichkeit p ist.

a) X sei die Anzahl 6er, wenn man einen Laplace-Würfel zehn Mal wirft.

b) X sei die Anzahl Asse, wenn man aus 36 Jasskarten vier Karten mit einem Griff zieht.

c) X sei die Anzahl weisser Kugeln, wenn man aus einer Urne mit drei weissen und vier schwarzen Kugeln sieben Mal eine Kugel zieht und diese jedesmal zurücklegt.

d) X sei die Anzahl fauler Eier in einer 6er-Packung, wenn jedes tausendste Ei faul ist.

e) X sei die Anzahl der Augen, wenn man einen Würfel einmal wirft.

Übung 18.
Für ein Spiel werden 5 Würfel gleichzeitig geworfen. Wir betrachten die Anzahl Einsen, welche dabei gewürfelt werden. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) genau eine Eins,
b) mindestens eine Eins,
c) mehr als drei Einsen,
d) höchstens 4 Einsen,
e) höchstens 5 Einsen,
f) ausschliesslich Einsen gewürfelt werden?

Übung 19.
Wir werfen zwei Laplace-Würfel 15 Mal. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Augensumme 10

a) genau dreimal erreicht,
b) höchstens dreimal ereicht,
c) mindestens dreimal erreicht?

Übung 20.
In einer Urne mit n Kugeln sind 30% weiss und 70% schwarz. Es werden fünf Kugeln gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, genau eine weisse Kugel zu ziehen für jedes $n \in \{10, 100, 1000\}$, je einmal mit und einmal ohne Zurückzulegen.

Übung 21.
Aus der Tagesproduktion von 1000 Tablets werden 10 zur Kontrolle ausgewählt. Erfahrungsgemäss sind 1% der produzierten Tablets defekt.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens ein Tablet der Stichprobe defekt ist.

b) Erkläre, warum in diesem Fall annäherungsweise von einer binomialverteilten Zufallsgrösse ausgegangen werden kann.

Übung 22.
Das Rad eines Roulettspiels enthält Fächer, welche von 0 bis 36 nummeriert sind. Bei einer Drehung bleibt die Kugel in einem der Fächer liegen.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleibt bei n Runden die Kugel nie im Fach mit der Nummer 0 stehen?

b) Nach n Runden stellt man fest, dass die Kugel auf 10 der 37 Felder noch nie liegen geblieben ist. Schätze ab, wie oft das Spiel durchgeführt wurde. (Repetitions-Tipp: Rechne ohne `solve()`)

Übung 23.

a) In einem Spital muss der Rettungsdienst durchschnittlich 1000 Mal pro Jahr ausrücken. Schätze die Anzahl Tage eines Jahren, an welchen der Krankenwagen in der Garage gelassen werden kann.

b) In einem anderen Spital vergehen ungefähr 100 Tage im Jahr, ohne dass der Rettungsdienst ausrücken muss. Schätze die Anzahl Einsätze des Rettungsdienstes dieses Spitals.

Übung 24.
Während der Schlussphase der Maturaarbeit wollen alle Schüler ihre Arbeit drucken. Während dieser Zeit benötigt ein Schüler durchschnittlich 10 Minuten pro Stunde einen Drucker. Wir wollen beurteilen, ob vier Drucker ausreichen, wenn sich die Schüler nicht absprechen? Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie nicht ausreichen? Welche Vereinfachungen müssen für dieses Modell gemacht werden?

Übung 25.
Die Beschwerdenabteilung einer Firma beschäftigt 8 Sachbearbeiter. Deren Telefone sind mit einer Telefonanlage verbunden, welche gleichzeitig drei Verbindungen aufrecht erhalten kann.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit reicht diese Anlage aus, wenn jeder Sachbearbeiter im Schnitt 12 Minuten pro Stunde telefoniert?

Übung 26.
8% aller Männer und 0.4% aller Frauen leiden in Europa an der Rot-Grün-Blindheit.

a) Wie viele Männer und wie viele Frauen muss man befragen, bis man je mit mehr als 98% Wahrscheinlichkeit mindestens eine erkrankte Person findet?

b) Wie viele erkrankte Personen sind bei der Befragung von 1000 Personen zu erwarten. (Unterscheide Frauen und Männer!)

c) Wie gross ist jeweils der Anteil innerhalb einer Standardabweichung um den in b) berechneten Werten bei den Geschlechtern?

Übung 27.
Aus einer Urne mit 75 weissen und 25 schwarzen Kugeln wird 40 Mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen. X sei die Anzahl der dabei gezogenen weisse Kugeln.

Bestimme die kleinste natürliche Zahl k, für welche $P(\mu - k \leq X \leq k + \mu) \geq 0.95$.

Übung 28.
Eine Zufallsgrösse X sei binomialverteilt mit $n = 30$ und $p = 0.45$.

a) Bestimme alle Werte von X, welche im Intervall $|X - \mu| \leq k \cdot \sigma$ liegen, für $k = 1, 2, 3$.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt X Werte aus diesen Intervallen an?

Übung 29.
Eine Zufallsgrösse X ist binommialverteilt mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ. Bestimme daraus n und p.

Übung 30.
Für welchen Wert von p ist die Standardabweichung einer binomialverteilten Zufallsgrösse am grössten?

Übung 31.
Ein Ingenieur plant den Bau einer Brücke, zu deren Errichtung 400 Schrauben notwendig sind. Die Erfahrung zeigt, dass jede 1000. Schraube entweder defekt geliefert wird oder beim Bau kaputt geht. Wie viele Schrauben müssen bestellt werden, damit man mit höchstens 5% Wahrscheinlichkeit zu wenig Schrauben hat?

Übung 32.
Ein Hotel mit 360 Betten nimmt 400 Buchungen entgegen, da erfahrungsgemäss 10% aller Buchungen storniert werden.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden die Betten nicht für alle Personen ausreichen, welche tatsächlich anreisen?

b) Wie viele Buchungen kann das Hotel annehmen, wenn das Risiko auf eine Überbuchung kleiner als 1% sein soll?

Übung 33.
Ein Konzertsaal fasst 720 Personen. Erfahrungsgemäss werden nur 85% der vorbestellten Karten abgeholt. Die weiteren Bestellungen kommen in der Reihenfolge des Eingangs auf eine Warteliste. Bis zu welcher Stelle besteht auf der Warteliste noch Aussicht auf Erfolg?

2.3 Die Normalverteilung

Lernziele

Das Ziel der *Normalverteilung* ist es, die Binomialverteilung durch eine für jeden Wert $k \in \mathbb{R}$ definierte Kurve anzunähern. Die in Abbilgung 5 gezeigte Kurve approximiert die Verteilung der einer binomialverteilten Zufallsgrösse mit $n = 20$ Wiederholungen und einer Erfolgswahrscheinlichkeit von $p = 0.4$.

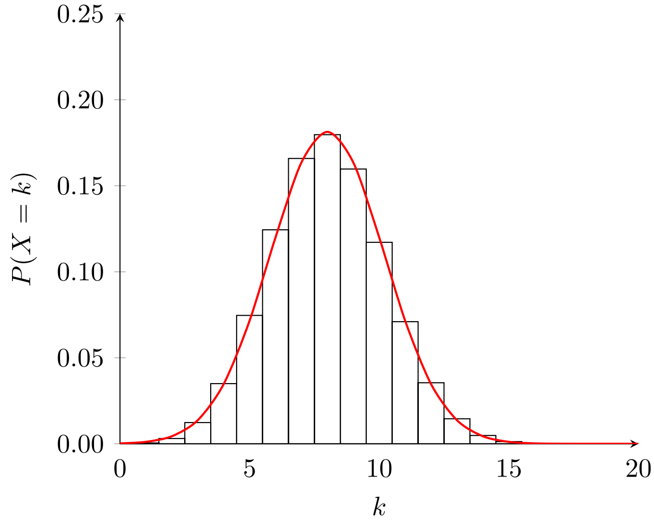


Abbildung 5: Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

Wollen wir nun die Wahrscheinlichkeit $P(a \leq X \leq b)$ berechnen, müssen wir nicht mehr die einzelnen Balken aus der Binomialverteilung addieren, wie können die Fläche unter der Kurve der Normalverteilung berechnen.

Da die Normalverteilung auf den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und nicht nur auf $\mathbb{N}$ definiert ist, bildet sie eine veralgemeinerung der Binomialverteilung. Eine Zufallsgrösse, welche für jedes $k \in \mathbb{R}$ definiert ist nennen wir *stetige Verteilung* – im Gegensatz zu *diskreten* Wahrscheinlichkeitsverteilungen, welche nur auf endlich vielen Werten definiert sind.

Nun müssen wir diese Funktion definieren, welche die Binomialverteilung annähert.

Definition 2.8. Für zwei Werte $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ definieren wir die Funktion $\varphi_{\mu,\sigma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi_{\mu,\sigma}(x) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Diese Funktion hat die gute Eigenschaft, dass die Fläche unter dem Graphen genau den Wert 1 ergibt, sie eignet sich also als Wahrscheinlichkeitsmass. Wir sagen eine Zufallsgrösse X ist $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-Normalverteilt, wenn gilt

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \varphi_{\mu,\sigma}$$

Wir schreiben auch $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Dabei ist μ der Erwartungswert und σ die Standardabweichung von X.

Übung 34.
Im einer langjährigen Studie hat man herausgefunden, dass Schüler der 7. bis 12. Klasse im Durchschnitt 1.65 cm gross sind. Die Standardabweichung beträgt 10.3 cm. Die Körpergrösse der Schüler wird als Normalverteilt angenommen.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig asgewählter Schüler grösser als 1.7 cm?

b) In welchem symmetrischen Bereich um den Durchschnitt werden 50% aller Schüler liegen?

Übung 35.
In einem Ort gibt es einige Karpfenteiche. Das Gewicht der Karpfen ist normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 4\,\text{kg}$ und der Standardabweichung $\sigma = 1.25\,\text{kg}$.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, einen Karpfen zu fangen, der höchstens 2.5 kg (mindestens 5 kg) wiegt?

b) Wieviel Prozent aller Karpfen wiegen zwischen $3\,kg$ und 4.5 kg?

c) In welchem zum Erwartungswert symmetrischen Gewichtsbereich liegen 80% aller Karpfen?

d) Der Fischereiverband will einen Preis für die schwersten Karpfen aussetzen. Welches Mindestgewicht muss man verlangen, damit die Wahrscheinlich keit, den Preis zu bekommen, 2% beträgt?

e) In einem kleinen Teich befinden sich 10 Karpfen und 15 Barsche. Ein Angler beschliesst, 3 Fische zu fangen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens 2 Karpfen fängt? (Die gefangenen Fische werden nicht zurückgeworfen.)

Übung 36.
Rechne die folgende Aufgabe mit Hilfe der Normalverteilung: Ein Medikament für eine Krankheit heilt diese mit einer Wahrscheinlichkeit von 80%.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 400 behandelten Personen höchstens 320 (zwischen 310 und 331) geheilt werden?

b) In welchem zum Erwartungswert symmetrischen Bereich lieft die Anzahl der geheilten mit 95% Wahrscheinlichkeit?

Übung 37.
Das Gewicht von neugeborenen Kindern sei normalverteilt mit $\mu = 3200\,\mathrm{g}$ und $\sigma = 800\,g$.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Neugeborenes

   a) mehr als 3000 g,

   b) höchstens 2500 g,

   c) zwischen 4000 g und 5000 g wiegt?

b) Wie schwer muss ein Neugeborenes sein, damit es zu den 20% leichtesten (15% schwersten) gehört?

Übung 38.
Die Standardabweichung bei der Reissfestigkeit von Kettengliedern wird mit $\sigma = 1300$ Newton geschätzt. Wie gros muss der Erwartungswert μ mindestens sein, damit höchstens 2% (5%) der Kettenglieder eine Festigkeit von weniger als 10000 Newton besitzen?

Übung 39.
Waschmaschinen sollen für einen Waschgang durchschnittlich 65 l Wasser verbrauchen. Ein Hersteller will erreichen, dass bei höchstens 5% (10%) seiner Maschinen der Wasserverbrauch grösser als 75 l ist. Welche Standardabweichung darf die Maschine (höchstens) haben, wenn man voraussetzt, dass der Wasserverbrauch normalverteilt ist?

Übung 40.
Die künftig erreichbare mittlere Lebenserwartung des Menschen wird auf 85 Jahre geschätzt mit der Standardabweichung $\sigma = 4.5$ Jahre.

a) Welcher Anteil der Menschen würde höchstens 75 Jahre alt?

b) Welcher Anteil der Menschen würde mindestens 90 Jahre alt?

c) In welchem zum Mittelwert symmetrischen Bereich würden 95% der erreichten Lebensalter liegen?

2.4 Lösungen zu den Übungen

Lösung 4.

a)

k	1	2	3
P(X=k)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

$E(X) = \frac{7}{3} \approx 2.33$; $\sigma \approx 0.75$

b)

k	2	3	4	5	6
P(Y=k)	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

$E(Y) = \frac{14}{3} =\approx 4.67$; $\sigma = \frac{\sqrt{10}}{3} \approx 1.05$

Lösung 5.
$a = 1 - 0.3 - 0.2 - 0.1 - 0.2 = 0.2$

$E(X) = 0.2 \cdot 1 + 0.3 \cdot 2 + 0.2 \cdot 3 + 0.1 \cdot 4 + 0.2 \cdot 5 = 2.8$

$\sigma = 1.4$

Lösung 6.
Lösen eines Gleichunssystemes ergibt $a = b = \frac{3}{20} = 0.15$

$E(X) = 2 \cdot 0.05 + 3 \cdot 0.25 + 4 \cdot 0.15 + 5 \cdot 0.15 + 6 \cdot 0.1 + 7 \cdot 0.3 = 4.9$

$\sigma = 1.7$

Lösung 7.
Wir betrachten

X: "Anzahl Ziehungen bis ein brauchbares Lämpchen gezogen wird."

a) Mit einem Baumdiagramm erhalten wir die Verteilung:

k	1	2	3	4
$P(Y = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$

$E(X) = \frac{7}{4} = 1.75$

b)

k	2	3	4	5
$P(Y = k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$

$E(X) = \frac{7}{2} = 3.5$

Lösung 8.
Wir betrachten die Zufallsgrösse

X: "Anzahl mal Kopf bei fünf Würfen."

a) Die Tabelle der Wahrscheinlichkeitsverteilung sieht in diesem Fall folgendermassen aus:

k	$(X = k)$	$P(X = k)$	$k \cdot P(X = k)$
0	(Z,Z,Z,Z,Z)	$\left(\frac{1}{2}\right)^5$	0
1	(Z,Z,Z,Z,K), (Z,Z,Z,K,Z), ...	$5\left(\frac{1}{2}\right)^5$	$\frac{5}{32}$
2	(Z,Z,Z,K,K), (Z,Z,K,Z,K), ...	$\binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^5$	$\frac{20}{32}$
3	(Z,Z,K,K,K), (Z,K,Z,K,K), $\cdots$	$\binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^5$	$\frac{30}{32}$
4	(Z,K,K,K,K), (K,Z,K,K,K), $\cdots$	$5\left(\frac{1}{2}\right)^5$	$\frac{20}{32}$
5	(K,K,K,K,K)	$\left(\frac{1}{2}\right)^5$	$\frac{5}{32}$
			$\mu = \frac{80}{64} = \frac{5}{2}$

Wir erwarten im Durchschnitt 2.5 mal Kopf.

b) Wir erhalten die folgende Verteilungstabelle:

k	$(X = k)$	$P(X = k)$	$k \cdot P(X = k)$
0	(Z,Z,Z,Z,Z)	$\left(\frac{2}{3}\right)^5$	0
1	(Z,Z,Z,Z,K), (Z,Z,Z,K,Z), ...	$5\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)$	$\frac{80}{243}$
2	(Z,Z,Z,K,K), (Z,Z,K,Z,K), ...	$\binom{5}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$\frac{160}{243}$
3	(Z,Z,K,K,K), (Z,K,Z,K,K), $\cdots$	$\binom{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$\frac{120}{243}$
4	(Z,K,K,K,K), (K,Z,K,K,K), $\cdots$	$5\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^4$	$\frac{40}{243}$
5	(K,K,K,K,K)	$\left(\frac{1}{3}\right)^5$	$\frac{5}{243}$
			$\mu = \frac{405}{243} = \frac{5}{3} \approx 1.67$

Wir erwarten durchschnittlich 1.67 mal Kopf.

Die Lösung dieser Aufgabe lässt vermuten, dass die Intuition korrekt ist: Der Erwartungswert beträgt $5 \cdot \frac{1}{2}$ respektive $5 \cdot \frac{1}{3}$. Der Beweis, dass dies in jedem Fall einer solchen Verteilung korrekt ist, folgt im nächsten Kapitel. Die hier benutze Verteilung wird *Binomialverteilung* genannt.

Lösung 9.
a) $E(X) = 2.5$

b) $E(X) = \frac{10}{3} \approx 3.33$

Die in dieser Aufgabe benutze Verteilung wird *hypergeometrische Verteilung* genannt.

Lösung 10.

a) Mit einem Baumdiagramm erhalten wir die Verteilung:

k	0	1	2	3
$P(Y = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$E(X) = \frac{12}{8} = 1.5$

b) Der Einsatz muss genau dem Erwartungswert entsprechen.

Lösung 11.

a) $E(X) = 2$

b) $E(X) = 2$ (Geometrische Reihe)

Lösung 12.

Wir betrachten die Zufallsgrösse:

X: "Gewinn in einem Spiel in Franken."

k	-1	1	2	3
$P(X = k)$	$\left(\frac{5}{6}\right)^3$	$3\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)$	$3\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^2$	$\left(\frac{1}{6}\right)^3$

$$E(X) = -\left(\frac{5}{6}\right)^3 + 3\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right) + 6\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{6}\right)^3 = -\frac{17}{216} \approx -8\,\text{Rp.}$$

Das Spiel lohnt sich also nicht.

Lösung 13.

a) $P(\text{“Peter gewinnt”}) = \frac{\binom{3}{2}\binom{4}{1}}{\binom{7}{3}} + \frac{1}{\binom{7}{3}} = \frac{12}{35} + \frac{1}{35} = \frac{13}{35}$

b) $4\frac{13}{35} - 3\left(1 - \frac{13}{35}\right) = -\frac{2}{5} = -0.4$

c) Das Spiel lohnt sich für Peter längerfristig nicht, da er im Durchschnitt 40 Rappen pro Runde verliert.

Lösung 14.

In der unteren Tabelle bezeichen k die Anzahl Sätze:

k	$P(X=k)$
3	$2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$
4	$2 \cdot 3\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8}$
5	$2\binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{3}{8}$

$$E(X) = 3\frac{1}{4} + 4\frac{3}{8} + 5\frac{3}{8} = \frac{33}{8} \approx 4.13$$

Lösung 15.

$$E(X) = \frac{\binom{6}{1}\binom{39}{5}}{\binom{45}{6}} + 2\frac{\binom{6}{2}\binom{39}{4}}{\binom{45}{6}} + 3\frac{\binom{6}{3}\binom{39}{3}}{\binom{45}{6}} + 4\frac{\binom{6}{4}\binom{39}{2}}{\binom{45}{6}} + 5\frac{\binom{6}{5}\binom{39}{1}}{\binom{45}{6}} + 6\frac{1}{\binom{45}{6}} = \frac{4}{5} = 0.8$$

Lösung 16.

Rein rechnerisch müsste man bereit sein, unendlich viel für das Spiel bezahlen. Die Wahrscheinlichkeit, dass im n-ten Münzwurf Kopf erscheint und man gewinnt ist $P = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Der Erwartungswert lässt sich also wie folgt berechnen:

$$\mu = \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + 2^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots$$

Diese Summe geht offensichtlich gegen Unendlich. Der zu erwartende Gewinn ist also theoretisch unendlich gross.

Lösung 17.

a) Ja, $p = \frac{1}{6}$.
b) Nicht binomialverteilt, nach dem Ziehen einer Karte ändern sich die Wahrscheinlichkeiten
c) Ja, Erfolg: Schwarze Kugel, $p = \frac{3}{7}$.
d) Ja, Erfolg: Verfaultes Ei, $p = \frac{1}{1000}$.
e) Nein, es gibt zu viele Ergebnisse.

Lösung 18.

a) `binompdf(5,1/6,1)`= 0.4019
b) `binomcdf(5,1/6,1,5)`= 0.5981
c) `binomcdf(5,1/6,4,5)`= 0.0033
d) `binomcdf(5,1/6,4)`= 0.9999
e) 1
f) `binompdf(5,1/6,5)`= 0.0.001

Lösung 19.

a) 0.0927
b) 0.9688
c) 0.1239

Lösung 20.
Allgemein berechnen wir die Wahrscheinlichkeiten mit

$$P_{mZ} = \binom{5}{1} 0.3 \cdot 0.7^4$$

für den Fall, wo wir Kugeln zurücklegen oder

$$P_{oZ} = \frac{\binom{0.3n}{1}\binom{0.7n}{4}}{\binom{n}{5}}$$

Daraus ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten:

$n = 10$: $P_{mZ} = 36.02\%$, $P_{oZ} = 41.67\%$

$n = 100$: $P_{mZ} = 36.02\%$, $P_{oZ} = 36.54\%$

$n = 1000$: $P_{mZ} = 36.02\%$, $P_{oZ} = 36.06\%$

Lösung 21.
Da aus sehr vielen Tablets nur wenige ausgewählt werden, darf hier binomialverteilt mit $p = 0.01$ gerechnet werden.

a) $P(X \leq 1) = 0.99^{10} + \binom{10}{1} 0.01 \cdot 0.99^9 \approx 99.57\%$

b) s.o.

Lösung 22.

a) $\left(\frac{36}{37}\right)^n$

b) $n = \frac{\log(10) - \log(37)}{\log(36) - \log 37} = 48$ (Das Ergebnis ist etwa 47.75, n muss aber eine ganze Zahl sein)

Lösung 23.

a) $p = \left(\frac{364}{365}\right)^{1000}$
$E(X) = 365 \cdot p \approx 23.49$
Es wird an schätzungsweise 23 Tagen keinen Einsatz geben.

b) $n = \frac{\log(10) - \log(37)}{\log(36) - \log 37} = 472$ (Das Ergebnis ist etwa 471.92, n muss aber eine ganze Zahl sein)

Lösung 24.

Lösung 26.

a) Gesucht ist kleinste n mit $P(k \geq 1) > 98\%$. Diese Ungleichung wird unseren Rechner vemutlich überfordern. Aber die Gegenwahrscheinlichkeit lässt sich einfacher berechnen. Wir suchen also das grösste n für welches $P(k = 0) < 2\%$ ist:

Männer:

$$\begin{aligned} 0.92^n &< 0.02 \\ n \log(0.92) &< \log(0.02) \\ n &> \frac{\log(0.02)}{\log(0.92)} \\ n &> 46.91 \\ n &= 47 \end{aligned}$$

Frauen:

$$\begin{aligned} 0.996^n &< 0.02 \\ n \log(0.996) &< \log(0.02) \\ n &> \frac{\log(0.02)}{\log(0.996)} \\ n &> 976.05 \\ n &= 977 \end{aligned}$$

b) In dieser Aufgabe fehlt der Frauenanteil unter der Gesamtbefölkerung. Dieser muss anderweitig ausfindig gemacht werden. Gemäss Bundesamt für Statistik betrug der Anteil an Frauen in der Schweiz 50.5% [6]

$$E(X) = E(X_M) + E(X_F) = 495 \cdot 0.08 + 505 \cdot 0.004 = 41.62 \approx 42$$

c) **Männer:**

$$\sigma_M = \sqrt{495 \cdot 0.08 \cdot 0.92} \approx 6$$

Wir betrachten also die Wahrscheinlichkeit innerhalb der Grenzen $E(X_M) - \frac{\sigma_M}{2} \approx 43$ und $E(X_M) + \frac{\sigma_M}{2} \approx 47$:

$$P(37 \leq X_M \leq 43) \approx 43.54\%$$

[6] http://www.bfs.admin.ch/bfs/portal/de/index/themen/01/01/key.html (21.12.2015)

Frauen:

$$\sigma_F = \sqrt{505 \cdot 0.004 \cdot 0.996} \approx 1.4$$

Wir betrachten also die Wahrscneinlichkeit innerhalb der Grenzen $E(X_M) - \frac{\sigma_F}{2} \approx 2$ und $E(X_F) + \frac{\sigma_F}{2} \approx 3$:

$$P(2 \leq X_F \leq 3) \approx 45.37\%$$

Lösung 27.

$$\mu = 40 \cdot \frac{75}{100} = 30$$

Wir suchen das kleinste k für welches $P(30 - k \leq X \leq 30 + k) \geq 0.95$. Unser Taschenrechner wird diese Gleichung nicht lösen können. Wir können das Problem entweder in Python programmieren oder einfach durch Probieren herausfinden. Wir stellen so fest, dass

$$P(30 - 5 \leq X \leq 30 + 5) = 95.77\%$$

der erste Wert ist, welcher 95 % überschreitet. Der gesuchte Wert ist also $k = 5$.

Lösung 28.

$$\mu = 30 \cdot 0.48 = 14.4 \qquad \sigma = \sqrt{30 \cdot 0.48 \cdot 0.52} \approx 3.2$$

k	a)	b)
1	$\{12, 13, 14, 15, 16, 17\}$	72.68%
2	$\{8, 9, \ldots, 20\}$	98.26%
3	$\{5, 6, \ldots, 24\}$	99.98%

Lösung 29.

$$\mu = 30 \cdot 0.48 = 14.4 \qquad \sigma = \sqrt{30 \cdot 0.48 \cdot 0.52} \approx 3.2$$

k	a)	b)
1	$\{12, 13, 14, 15, 16, 17\}$	72.68%
2	$\{8, 9, \ldots, 20\}$	98.26%
3	$\{5, 6, \ldots, 24\}$	99.98%

Lösung 30.
$p = 0.5$

3 Hypothesentests

Lernziele

- Du formulierst die Null-Hypothese H_o sowie die Alternativ-Hypothese H_a.
- Du bestimmst den Annahme- und den Verwerfungsbereich für die Null-Hypothese bei ein- und beidseitigen Hypothesentests.
- Du formulierst für vorliegende Hypothesen, was im gegebenen Fall ein Fehler 1. und 2. Art ist.
- Du berechnets den p-Wert, mit welchem du an Hand des gegebenen Signifikanzniveaus α bestimmst, ob die Null-Hypothese verworfen werden kann.
- Du kannst erklären, warum Hypothesentests nie die Null-Hypothese belegen oder die Alternativ-Hypothese verwerfen. ($\rightarrow$ "In dubio pro reo" Analogie)
- Du berechnest an Hand der Verwerfungsbereiches die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art.

Im folgenden Kapitel beschäftigen wir uns mit statistischen Test oder *Hypothesentests*. Dabei geht es darum, eine Aussage (Hypothese) statistisch zu belegen. Da wir selten in der Situation sind, wo wir sagen können, etwas treffe mit 100%-iger Wahrscheinlichkeit ein, wollen wir die *Irrtumswahrscheinlichkeit* auf ein bestimmtes Niveau beschränken. So können wir zum Beispiel fordern, dass wir uns mit einer Wahrscheinlichkeit von weniger als 5% irren. Wir nennen die festgelegte Beschränkung *Signifikanzniveau* α.

In der Statistik gilt es zuerst herauszufinden, welche Wahrscheinlichkeitsverteilung in einem gegebenen Fall überhaupt vorliegen könnte. Je nach Situation und Verteilung müssen wir unterschiedliche Tests wählen. Wir vereinfachen die Situation insofern, dass wir nur Fälle anschauen, welche mit der Binomialverteilung gut modelliert werden können.

Wollen wir einen *Hypothesentest* durchführen, so müssen wir in einem ersten Schritt die Hypothesen aufstellen. Dabei ist die *Alternativhypothese* oder einfach die *Hypothese* jene Aussage, welche wir mit dem Test belegen wollen.

Der Hypothese wird die *Nullhypothese* gegenüber gestellt. Bei ihr handelt es sich um das, was im Moment als korrekt angenommen wird, was wir aber mit unserer statistischen Untersuchung widerlegen möchten. In binomialverteilten Fällen enthält die Nullhypothese immer eine bestimmte Erfolgswahrscheinlichkeit.

Definition 3.1. Wir unterscheiden die folgenden beiden Hypothesen:

- Die **Nullhypothese** ist die zu testende Hypothese, welche im Falle einer binomialverteilten Zufallsversuchs durch ihre Erfolgswahrscheinlichkeit angegeben wird. Sie enhält immer ein Gleichzeichen, also $=$, $\leq$ oder ge. Wir bezeichnen die Nullhypothese mit H_0

- Die **Alternativhypothese** ist die statistische Hypothese, welche wir als alternative Annahme zu H_0 betrachten. Sie ist immer in diesen Fällen wahr, wo H_0 falsch ist, daher enthält sie immer ein Ungleicheitszeichen wie $\neq$, $<$ oder $>$. Wir bezeichnen die Alternativhypothese mit H_a. Oft wird auch H_1 benutzt.

Machen wir mit einem statistischen Test mit Hypothese H_a und Nullhypothese H_0 eine Aussage, so können uns die folgenden Fehler unterlaufen:

Definition 3.2. Wir unterscheiden die folgenden beiden grundlegenden Fehlerarten:

Fehler 1. Art
Wir verwerfen die Nullhypothese H_o und betrachten die Alternativhypothese H_a als belegt, obwohl in der Realität H_0 wahr wäre. Diese Art Fehler wird auch *α-Fehler* genannt.

Fehler 2. Art
Wir betrachten weiterhin die Nullhypothese H_0 als wahr, obwohl in Realität unsere Alternativhypothese korrekt wäre. Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler dieser Art lässt sich im allgemeinen nicht kontrollieren, sie ist abhängig von der wahren, aber meist unbekannten Erfolgswahrscheinlichkeit von H_a. Diese Fehlerart wird auch *β-Fehler* genannt.

Wir gehen davon aus, dass ein Fehler 1. Art schlimmer ist als ein Fehler 2. Art. Wir verfahren hierbei nach dem in Gerichtverfahren üblichen Grundsatz "in dubio pro reo" ("Im Zweifel für den Angeklagten"). Dies ist auch der Grund, warum wir nie H_0 als belegt betrachten. Wir können nur sagen, dass wir H_0 nicht widerlegen konnten und daher im Zweifelsfall weiterhin davon ausgehen, dass H_0 wahr ist.

Die beiden Fehlerarten können wie folgt zusammengefasst werden:

		Entscheidung	
		H_0 verwerfen	*H_0 beibehalten*
Realität	*H_0 ist falsch*	Korrekte Aussage	β-Fehler
	H_0 ist wahr	α-Fehler	Korrekte Aussage

Für einen Hypothesentest möchten wir aus den oben erklärten Gründen das Auftreten von einem α-Fehler möglichst klein halten. Aus diesem Grund legen wir jeweils immer ein Signifikanzniveau fest:

Definition 3.3 (Signifikanzniveau)**.** Das *Signifikanzniveau* eines Hypotesentests bezeichnet die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art. Wir bezeichnen diese Wahrscheinlichkeit mit α. Es ist üblich, $\alpha = 0.05$ oder $\alpha = 0.01$ zu wählen.

Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art bezeichnen wir entsprechend mit β.

Wir unterscheiden ein- und zweiseitige Hypothesentests. Im Falle eines zweiseitigen Tests legen wir nicht fest, in welche Richtung eine Abweichung nachgewiesen werden soll. Die Null- und Alternativhypothesen könnten in diesem Fall etwa die folgenden sein:

H_0: "Die Erfolgswahrscheinlichkeit beträgt $p = 0.43$"
H_a: "Die Erfolgswahrscheinlichkeit beträgt nicht 0.43, also $p \neq 0.43$"

gegenübergestellt werden:

In einem einseitigen Test hegen wir die Vermutung, dass die Erfolgswahrscheinlichkeit entweder zu klein oder zu gross ist.

In einem einseitigen Test gibt es zwei Möglichkeiten:

H_0: "Die Erfolgswahrscheinlichkeit beträgt höchstens $p \leq 0.43$"
H_a: "Die Erfolgswahrscheinlichkeit ist grösser als 0.43, also $p > 0.43$"

oder

H_0: "Die Erfolgswahrscheinlichkeit beträgt mindestens $p \geq 0.43$"
H_a: "Die Erfolgswahrscheinlichkeit beträgt weniger als 0.43, also $p < 0.43$"

Wichtig in allen drei Fällen ist, dass die Nullhypothese immer eine Gleichheit beinhaltet und die Alternativhypothese eine Ungleichheit, also $\neq$, $<$ oder $>$.

Definition 3.4 (p-Wert)**.** Der p-Wert bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, dass das das in unserer Stichprobe aufgetretene oder ein extremeres Ereignis eintrifft, unter der Annahme dass H_0 wahr ist.

Je kleiner der p-Wert ist, um so unwahrscheinlicher ist das von uns beobachtete Ereignis, wenn H_0 wahr ist.

Um eine Entscheidung zu treffen vergleichen wir den p-Wert mit α.

$p \leq \alpha$**:** Wir verwerfen die Nullhypothese H_0.

$p > \alpha$**:** Wir können H_o nicht verwerfen.

3.1 Durchführen eines Hypothesentests

Ein Hypothesentest besteht aus den folgenden Schritten:

a) Formuliere die Null- und die Alternativhypothese.

b) Setzte das Signifikanzniveau α fest.

c) Erfasse statistische Daten und bestimem den p-Wert

d) Triff eine Entscheidung:
Falls $p \leq \alpha$: Die Nullhypothese H_0 wird verworfen und H_a angenommen.
Falls $p > \alpha$: Wir können H_0 nicht widerlegen.

e) Formuliere deine Schlussfolgerung im Bezug auf die ursprüngliche Behauptung.

3.2 Annahme- und Verwerfungsbereich

Wie schon erwähnt möchten wir die Irrtumswahrscheinlicheit einschränken. Wir sagen beispielsweise, wir möchten die Alternativhypothese nur für richtig befinden, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass diese Annahme falsch ist, weniger als 5% beträgt. Wir sprechen in diesem Fall von einem Signifikanzniveau von $\alpha = 5\%$ oder von einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95%.

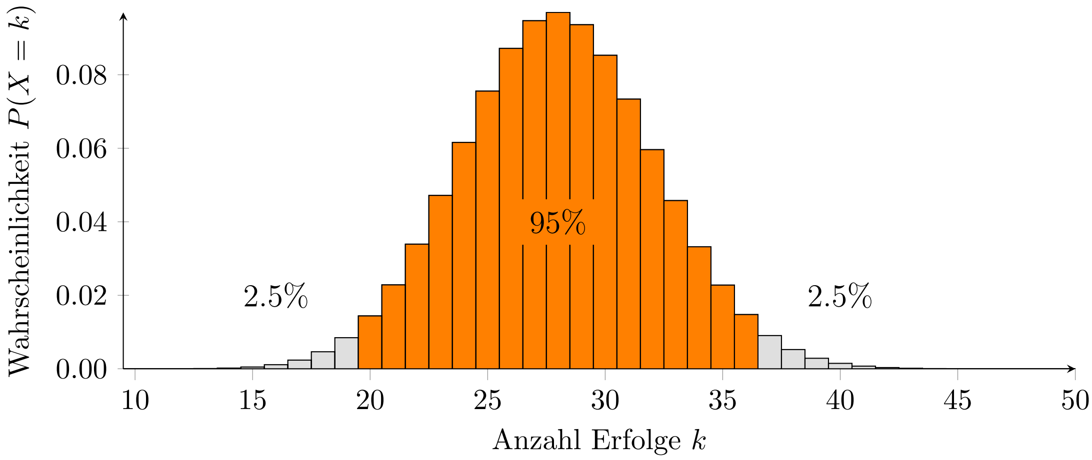


Abbildung 6: Annahmebereich bei $\alpha = 5\%$

Wie wir in den Aufgaben des letzten Kapitels gesehen haben, sind die Bereiche um den Erwartungswert, in welchen alle Ergebnisse mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit liegen, annäherungsweise nur von der Standard-Abweichung σ abhängig.

Satz 3.1. *Ist die Standardabweichung $\sigma \geq 3$, so lässt sich die Binomialverteilung durch die Normalverteilung annähern und es lassen sich daraus die Intervallschätzungen gewinnen:*

Radius r	*Beidseitig*	*Einseitig*
0.67σ	50%	75%
1.15σ	75%	80%
1.28σ	80%	90%
1.64σ	90%	95%
1.96σ	95%	97.5%
2.33σ	98%	99%
2.58σ	99%	99.5%
3.29σ	99.9%	99.95%

Dabei bezeichnet "Beidseitig" die Wahrscheinlichkeit $P(\mu - r \leq X \leq \mu + r)$ und "Einseitig" je nach dem $P(\mu - r \leq X)$ oder $P(X \leq \mu + r)$.

Der *Annahmebereich* bezeichnet jenen Bereich um den Erwartungswert μ in welchem die Anzahl Erfolge mit der gewählten Sicherheitswahrscheinlichkeit zu liegen kommt. Für eine Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95% ist der Annahmebereich in einem zweiseitigen Hypothesentest das Intervall

$$[\mu - 1.96\sigma,\ \mu + 1.96\sigma]$$

wie es in Abbildung 6 dargestellt ist.

Besagt unsere Hypothese, dass die Erfolgswahrscheinlichkeit signifikant grösser als p ist, so handelt es sich um einen einseitigen Test und der Annahmebereich ist

$$[0,\ \mu + 1.64\sigma].$$

In einem Histogramm dargestellt bedeutet dies, dass der gesamte Verwerfungsbereich nur auf einer Seite des Annahmebereichs liegt und daher der Annahmebereich auf dieser Seite kleiner werden muss, wie dies in Abbildung 7 dargestellt wird.

Beispiel 16. Jemand hat auf einem Computer ein Programm geschrieben, von dem er behauptet, dass es zuverlässig einen Münzwurf simuliert. Das bedeutet, dass es mit gleicher Wahrscheinlichkeit "Kopf" oder "Zahl" anzeigt.

Wir hegen den Verdacht, dass seine Behauptung nicht korrekt ist und möchten die Alternativhypothese

H_a: Das Programm zeigt zu oft "Kopf" oder "Zahl", also $p \neq 0.5$

prüfen. Dabei handelt es sich um einen zweiseitigen Hypothesentest, da wir uns nicht festlegen, ob "Kopf" oder "Zahl" zu oft auftritt. Die zugehörige Nullhypothese ist

H_0: "Kopf" trifft genau so oft ein wie "Zahl", also $p = 0.5$.

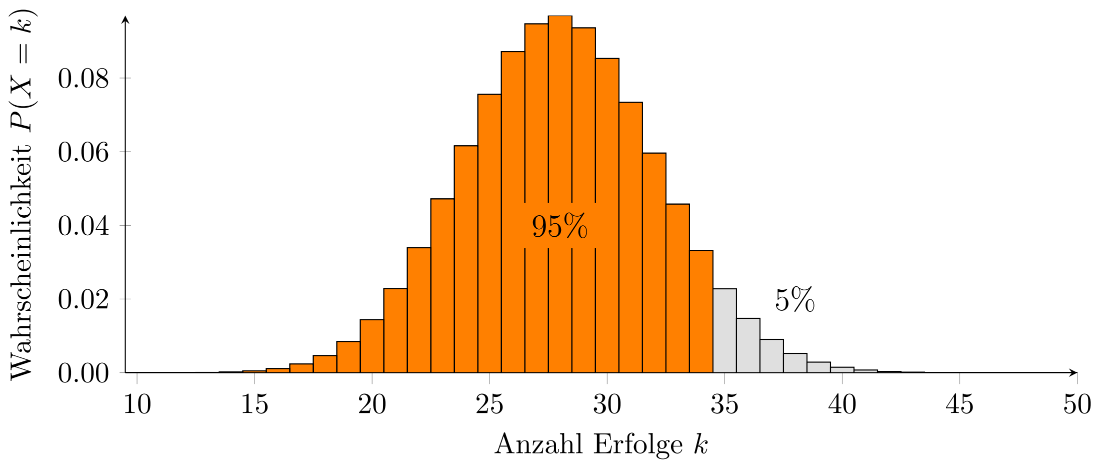


Abbildung 7: Annahmebereich bei $\alpha = 5\%$

Wir möchten unsere Hypothese mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 5\%$ belegen und führen zu diesem Zweck das Programm 700 mal aus. Nun können wir den Annahmebereich der Nullhypothese H_0 bestimmen.

Der Erwartungswert beträgt in diesem Fall $\mu = 0.5 \cdot 700 = 350$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{700 \cdot 0.5^2} \approx 13.23$. Weiter ist $1.96\sigma \approx= 25.93$. Mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit liegt das Ergebnis unseres Versuches also im Bereich

$$[350 - 25.93,\, 350 + 25.93] = [324,\, 376].$$

Wir runden den Annahmebereich vom Erwartungswert weg, damit wir sicher sind, dass wir mit mindestens 95%-iger Wahrscheinlichkeit im Annahmebereich zu liegen kommen, falls die Nullhypothese $p = 0.5$ korrekt ist.

Liegt das Ergebnis unseres Versuches in diesem Bereich, so können wir H_0 nicht widerlegen und müssten dem Programmierer weiterhin Glauben schenken. Wir hätten jedoch die Möglichkeit einen grösser angelegten Versuch mit mehr Wiederholungen durchzuführen und könnten so den Programmierer dennoch überführen. Wir haben also H_0 nicht bewiesen sondern nur nicht widerlegt.

Liegt unser Ergebnis jedoch nicht im Annahmebereich, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass es eintrifft und der Programmierer trotzdem recht hat, kleiner als $\alpha = 5\%$. In diesem Fall unterstellen wir dem Programmierer, seine Aussage sei falsch.

Übung 1.
Ein Würfel wird 320 Mal geworfen und es werden die Anzahl Einer gezählt. Du möchtest prüfen, ob der Würfel gezinkt ist. Formuliere die Null- sowie die Alternativhypothese und gibt den jeweiligen Annahme- und Verwerfungsbereich an (mit Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$, also mit

Sicherheitswahrscheinlichkeit 95%).

Übung 2.
Nach amtlichen Angaben hatte eine Automarke vor fünf Jahren einen Marktanteil von 31%. An Hand einer zufälligen Stichprobe von 750 Fahrzeugen soll überprüft werden, ob sich der Marktanteil signifikant verändert hat.

a) Formuliere die Null- und die Alternativhypothese sowie den Annahme- und den Verwerfungsbereich, um diese Überprüfung durchzuführen ($\alpha = 0.05$).

b) In der Stichprobe werden 261 Fahrzeuge dieser Marke gezählt. Hat sich der Marktanteil signifikant verändert?

Übung 3.
Ein Losverkäufer behauptet, dass 25% der Lose aus einer Lostrommel Gewinne seien. Man beobachtet, dass unter 64 verkauften Losen nur 10 Gewinne sind. Hat der Losverkäufer die Wahrheit gesagt?

Übung 4.
Eine Person behauptet, einen sechsten Sinn zu haben. In einem ihr nicht zugänglichen Raum wird eine Münze 50 Mal geworfen. Die genannte Person muss jedes Mal raten, ob Kopf oder Zahl geworfen wurde.

a) Formuliere die Null- und die Alternativhypothese in diesem Test.

b) Bestimme einen geeigneten Verwerfungsbereich der Nullhypothese.

c) Formuliere, was ein Fehler 1. Art in diesem Fall bedeutet und bestimme dessen Wahrscheinlichkeit.

Übung 5.
Ein alteingesessener Engländer behauptet, dass er herausfinden könne, ob in einer Tasse Tee mit Milch zuerst die Milch oder zuerst der Tee eingegossen worden sei. Um diese Behauptung zu testen, werden dem Engländer sechs Tassen vorgesetzt von welchen bei genau dreien die Milch erst nachträglich beigegeben wurde. Falls die Person alle Tassen richtig rät, wird man ihrer Behauptung glauben schenken.

a) Formuliere den Fehler 1. Art und berechne seine Wahrscheinlichkeit.

b) Wie viele Tassen müsste man in einem solchen Versuch der Testperson vorsetzen, damit das Signifikanzniveau von $\alpha = 1\%$ unterschritten würde?

Übung 6.
Ein Spieler benutzt einen gefälschten Würfel, bei welchem die Eins durch eine Sechs ersetzt wurde. Er zeigt den Würfel jedoch nicht. Ein Mitspieler hat den Verdacht, dass die Sechs zu oft erscheint und verlangt, dass der Spieler den Würfel 60 Mal werfe. Falls die Sechs mehr als 15 Mal käme, würde er den Würfel als gefälscht betrachten.

a) Was ist die Nullhypothese H_0 und die Alternativhypothese H_a in diesem Test?

b) Was stellt in diesem Test ein Fehler 1. Art und ein Fehler 2. Art dar?

c) Berechne die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler Fehler 1. und 2. Art.

Übung 7.
Ein Smartphone-Hersteller behauptet, dass mindestens 75% aller Smartphonebesitzer unter 25 ein Gerät seiner Marke besitzen. Um diese Aussage zu überprüfen, werden 100 zufällige Testpersonen ausgewählt.

a) Formuliere die Null- und die Alternativhypothese um die Aussage des Herstellers zu beweisen.

b) Berechne den Annahmebereich der Nullhypothese, wenn wir die Aussage mit einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.05$ eine signifikante Abweichung feststellen möchten.

c) Berechne die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art.

Übung 8.
In einer Abfüllanlage werden stündlich 7300 Bierflaschen gefüllt. Es kann nicht vollständig verhindert werden, dass einzelne Flaschen zu wenig Bier enthalten. Die Produktion müsste aber gestoppt und die Anlage überprüft werden, wenn mehr als 4% der Flaschen zu wenig Bier enthalten. Stündlich werden daher 100 zufällig ausgewählte Flaschen auf ihre Füllmenge überprüft.

Bei welcher Anzahl ungenügend gefüllter Flaschen müsste die Produktion gestoppt werden, wenn der Prozess höchstens mit 5% Wahrscheinlichkeit irrtümlicherweise gestoppt werden soll?

Übung 9.
Bei einer Umfrage will man herausfinden, wie hoch der Anteil von Schülern und Schülerinnen ist, welche ein Mobilfunk-Abonnement mit unbeschränkter Datenmenge haben. Von 100 zufällig ausgewählten Schülern gaben 34 an, ein Abo mit unbeschränkter Datenmenge zu besitzen.

a) In welchem Bereich liegt die Zahl der Schüler mit unbeschränkter Datenmenge an einer Schule mit 1300 Schülern mit 95% Sicherheitsniveau?

b) Wie viele Schüler hätte man mindestens befragen müssen, um die Abweichung des Stichprobenergebnisses vom wahren Wert mit 95% Wahrscheinlichkeit unter 4% zu bringen?

Übung 10.
Bei einer Initiative gehen $2'324'200$ Wahlberechtigte abstimmen. In welchem Bereich kommt das Ergebnis der Abstimmung zu liegen, wenn jeder Wahlberechtigte zufällig "Ja" oder "Nein" auf seinen Stimmzettel schreibt?

3.3 Lösungen zu den Übungen

Lösung 1.
H_0: "Der Würfel ist nicht gezinkt" $p = 0.5$.

H_a: "Der Würfel zeigt zu oft oder zu selten eine Eins" $p \neq 0.5$

$$\mu = 320 \cdot 0.5 = 160 \qquad \sigma = sqrt320 \cdot 0.5^2 \approx 8.94$$

Annahmebereich: $[160 - 1.96 \cdot 8.94, 160 + 1.96 \cdot 8.94] = [142, 178]$

Verwerfungsbereich: $[0, 141] \cup [179, 360]$

Lösung 2.
H_0: "Der Marktanteil hat sich nicht verändert." $p = 0.31$.

H_a: "Der Marktanteil hat sich signifikant verändert." $p \neq 0.31$

$$\mu = 750 \cdot 0.31 = 232.5 \qquad \sigma = sqrt320 \cdot 0.31 \cdot 0.69 \approx 12.67$$

Annahmebereich: $[232.5 - 1.96 \cdot 12.67, 232.5 + 1.96 \cdot 12.67] = [208, 257]$

(Mit dem TR können wir überprüfen, dass hier mathematisch gerundet werden darf.)

Verwerfungsbereich: $[0, 207] \cup [258, 750]$

Wir haben also nachgewiesen, dass sich der Marktanteil signifikant verändert hat.

Lösung 3.
Es handelt sich um einen einseitigen Test, das der Losverkäufer kaum verdächtigt wird, mehr als die Behaupteten 25% Gewinnlose in seiner Lostrommel zu haben.

H_0: "Losverkäufer sagt die Wahrheit." ($p \geq 0.25$)

H_a: "Losverkäufer hat gelogen und eine zu hohe Prozentzahl angegeben." ($p < 0.25$)

$\mu = 0.25 \cdot 64 = 16$, $\sigma = \sqrt{0.25 \cdot 0.75 \cdot 64} \approx 1.86$

Wir gehen von einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.05$ aus:

Untergrenze: $\mu - 1.96\sigma \approx 8.35$.

Wir können also nicht davon ausgehen, dass wir dem Losverkäufer einen Betrug nachgewiesen haben.

Achtung: Da $\sigma < 3$ müssen wir dies noch überprüfen und dürfen uns nicht auf die Annäherung durch die Normalverteilung verlassen.

Dabei stellen wir fest, dass $P(X = 9) \approx 0.97 > 0.95$ aber $P(X = 10) \approx 0.94 < 0.95$.

Unsere Rechnung gibt als nicht die richtige Grenze an, es liegt aber denoch keine signifikante Abweichung vor.

Lösung 4.

a) H_0:"Die Person rät rein zufällig oder liegt sogar zu oft falsch" ($p \leq \frac{1}{2}$)

H_a: "Die Person hat einen sechsten Sinn und errät das Ergebnis in mehr als 50% der Fälle richtig."

b) $\mu = 50 \cdot 0.5 = 25 \qquad \sigma = \sqrt{50 \cdot 0.5 \cdot 0.5} \approx 3.54$

Obere Grenze: $\mu + 1.64\sigma = 25 + 1.64 \cdot 3.54 \approx 30.8$

Annahmebereich: $[0, 31]$, Verwerfungsbereich: $[32, 50]$.

c) Ein Fehler erster Art liegt vor, wenn wir davon ausgehen, dass die Person hellseherische Fähigkeiten hat, obwohl sie rein zufällig geraten hat. Die Wahrscheinlichkeit für einen α-Fehler ist $P(X \geq 32) \approx 3.25\%$.

Lösung 5.

a) Ein Fehler erster Art bedeutet hier, dass man annimmt, dass die Person unterscheiden kann, was zuerst in den Tee gegossen wurde, obwohl die Person einfach zufällig geraten hat.

$\left(\frac{1}{2}\right)^6 = 1.5\%$

(Achunt: Aus dem Text wird nicht klar, ob die Person weiss, wie viele Tassen zu welcher Gruppe gehören. Hier wird davon ausgegangen, dass die Person nicht weiss, dass es drei Tassen sind, in welche zuerst Tee gegossen wurde.)

b)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}\right)^n &\leq \frac{1}{100} \\
n \log\left(\frac{1}{2}\right) &\leq \log\left(\frac{1}{100}\right) \\
n &\geq \frac{\log(1) - \log(100)}{\log(1) - \log(2)} \approx 6.69
\end{aligned}$$

Lösung 6.

$P(16 \leq X \leq 60) = 3.38\%$

Lösung 7.

a) H_0:"Mindestens 75% der unter 25 jährigen besitzen ein Smartphone des entsprechenden Herstellers" ($p \geq 0.75$)

H_a: "Der Marktanteil des Herstellers ist kleiner als behauptet." ($p < 0.75$)

b) $\mu = 100 \cdot 0.75 = 75 \qquad \sigma = \sqrt{100 \cdot 0.75 \cdot 0.75} \approx 4.33$

Untere Grenze: $\mu - 1.64\sigma = 75 - 4.33 \cdot 7.5 \approx 67.9$

Annahmebereich: $[67, 100]$, Verwerfungsbereich: $[0, 66]$.

c) $P(X \leq 66) = 2.75\%$

Lösung 8.
$\mu = 100 \cdot 0.04 = 4$, $\sigma = 1.95$

Da $\sigma < 3$ lohnt es sich nicht, die Normalverteilung zu bemühen. Wir müssen nur wenig Wahrscheinlichkeiten berechnen:

Wir stellen fest, dass $P(X = 6) \approx 0.893$ und $P(X = 7) \approx 0.952$. Wir müssen also bei 7 oder mehr Flaschen die Produktion stoppen.

Lösung 9.

Lösung 10.